Ortaöğretim

Matematik

9

Ders Kitabı

Havva AYTAR

Bu kitap, Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının **28 Mayıs 2018** tarih ve **78** sayılı kararıyla (listenin 234. sırasında) 2018-2019 öğretim yılından itibaren 5 (beş) yıl süreyle **ders kitabı** olarak kabul edilmiştir.

EKSEN yayıncılık

Gülbahar Mahallesi Cemal Sururi Sokak

Halim Meriç İş Merkezi No: 15/E Kat: 9 D: 41-42-44

Mecidiyeköy/İSTANBUL 0 (212) 275 00 35

Dil Uzmanı

Yasemin ŞEKERCİ

Görsel Tasarımcı

Özen ÇOLAK

ISBN

978-605-7812-12-4

Baskı ve Cilt

ÖZYURT Matbaacılık

Adres: Saray Mahallesi 123. Cadde No:2/1
Kahramankazan / ANKARA

Tel: 0 312 384 15 36 **Belgeç:** 0 312 384 15 37

Web: www.ozyurtmatbaacilik.com

Mail: ozyurt@ozyurtmatbaacilik.com

Sertifika No: 13385

Baskı Yeri ve Yılı

Ankara, 2019

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk

MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

ÜÇGENLER

VERİ

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

Sembol		Açıklama
p	:	p önermesi
p' (veya $\sim p$)	:	p önermesinin değili
$\equiv$	:	Denktir
$\forall$	:	Her
$\exists$	:	Bazı
$\wedge$	:	ve
$\vee$	:	veya
$\veebar$	:	ya da
$\Rightarrow$	:	ise
$\Leftrightarrow$	:	Ancak ve ancak
$\in$	:	Elemanıdır
$\notin$	:	Elemanı değil
{ } (veya $\emptyset$)	:	Boş küme
$\subseteq$ (veya $\subset$)	:	Alt küme
$\supseteq$ (veya $\supset$)	:	Kapsar
$\not\subseteq$	:	Alt küme değil
$s(A)$	:	A nın eleman sayısı
$\cup$	:	Birleşim
$\cap$	:	Kesişim
$A - B$ (veya $A \setminus B$)	:	A fark B
A'	:	A nın tümleyeni
$A \times B$	:	A ve B nin kartezyen çarpımı
$s(A \times B)$	:	A x B nin eleman sayısı
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}'$	:	İrrasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	:	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}^+$	:	Pozitif rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	:	Pozitif gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^-$	:	Negatif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}^-$	:	Negatif rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^-$	:	Negatif gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{R}^2$)	:	$\mathbb{R}$ kartezyen çarpım $\mathbb{R}$
EKOK	:	En küçük ortak kat
EBOB	:	En büyük ortak bölen
$<$	:	Küçük
$\leq$	:	Küçük veya eşit
$>$	:	Büyük
$\geq$	:	Büyük veya eşit
$=$	:	Eşittir
$\neq$	:	Eşit değildir
[a, b]	:	a, b kapalı aralığı

Sembol		Anlamı
$(a, b]$	:	a dan açık, b den kapalı aralık
$[a, b)$	:	a dan kapalı, b den açık aralık
(a, b)	:	a, b açık aralığı
$(-\infty, \infty)$	:	Uç noktaları sınırlandırılmamış aralık
$\lvert x \rvert$	:	Mutlak değer x
$\sqrt{\ }$	:	Karekök
$\sqrt[n]{\ }$	:	n. dereceden kök
%	:	Yüzde
$\frac{a}{b}$ (veya a : b)	:	a nın b ye oranı
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (veya a : b = c : d)	:	Orantı
$\overset{\triangle}{ABC}$	:	ABC üçgeni
$\widehat{ABC}$	:	ABC açısı
$m(\widehat{ABC})$	:	ABC açısının ölçüsü
[AB]	:	AB doğru parçası
$\lvert AB \rvert$	:	AB doğru parçasının uzunluğu
[AB	:	AB ışını
$\cong$	:	Eş
$\sim$	:	Benzer
$\perp$	:	Dik
//	:	Paralel
n_A	:	A açısının iç açıortayı
$\neq$	:	Eşit değildir
n'_A	:	A açısının dış açıortayı
V_a	:	a kenarının kenarortayı
G	:	Ağırlık merkezi
h_a	:	a kenarının yüksekliği
sinx	:	sinüs x
cosx	:	kosinüs x
tanx	:	tanjant x
cotx	:	kotanjant x
$A(\widehat{ABC})$	:	ABC üçgeninin alanı
$\overline{X}$	:	Aritmetik ortalama
S	:	Standart sapma
Q_2	:	Medyan
cm	:	Santimetre
m	:	Metre
km	:	Kilometre
dk.	:	Dakika
sn.	:	Saniye
sa.	:	Saat
L	:	Litre
mL	:	Mililitre
$\approx$	:	Yaklaşık

KİTABIMIZI TANIYALIM

Öğrenme alanlarının isimlerinin yer aldığı kısım

Alt öğrenme alanlarının isimlerinin yer aldığı kısım

İlgili alt öğrenme alanında öğrenilmesi amaçlanan temel konu ve kavramların yer aldığı kısım

Nerelerde Karşımıza Çıkar?

Günlük hayatta, doğru, mantıklı ve anlaşılır cümleler kurmakta, satranç, yapboz, zekâ küpü ve sudoku gibi akıl yürütme gerektiren oyunlarda, bilim, teknik ve felsefe alanında,

Alt öğrenme alanlarının günlük yaşamda nerelerde kullanıldığına dair bilgilerin yer aldığı kısım

Sembol ve Gösterimler

p

p' (veya ~ p)

≡

∀

∃

Konuyla ilgili sembol ve gösterimlerin yer aldığı kısım

Bilgi Kutusu

Doğru ya da yanlış kesin h adı verilir. Önermeler p, q le gösterilir. Bir önermenin önermenin doğruluk değeri küm bildiriyorsa bu önerme yanlış hüküm bildiriyorsa b ya da 0 ile gösterilir.

Konu ile ilgili tanımların, teoremlerin, bilgilerin yer aldığı kısım

Konu isimlerinin yer aldığı kısım

9.1.1. ÖNERMELER VE BİLEŞİK ÖNERMELER

Kesin hüküm bildiren cümlelerde kullanılan bağlaçların cümleye kattığı anlamları söyleyiniz.

Konu ile ilgili ilgi çekici anlatımların sonunda, öğrencilerin dikkatini kazanıma yönlendirmek için soruların yer aldığı kısım

Öğrencinin önceki bilgilerini kullanarak kazanımda yer alan bilgileri öğrenmesine hazırlık yapmak, öğrenciyi konuya yönlendirmek ve düşündürmek amacıyla hazırlanan açıklamaların ve soruların yer aldığı kısım

Bazı cümleler belli bir sonucu vurguladığı için kesin bir hüküm bildirmektedir. Kesin hüküm bildiren cümleler kesinlikle doğru ya da kesinlikle yanlıştır. Aşağıdaki cümleleri inceleyelim.

Konu içerisinde öğrenilenleri pekiştirmek amacıyla çözümünün öğrenciye bırakıldığı soruların yer aldığı kısım

Sıra Sizde

Aşağıdaki önermelerin değillerini yazınız.

p : "$3 - 2 \cdot 4 \geq -2$ dir."

q : "$(-4)^3 < 0$ dır."

Örnek

n farklı önerme için 64 farklı doğruluk durumu old
n yi bulalım.

Çözüm

n tane farklı önermenin 2^n tane doğruluk durumu c

$2^n = 64 \Rightarrow 2^n = 2^6 \Rightarrow n = 6$ olur.

Konu ile ilgili örneklerin ve çözümlerin yer aldığı kısım

Soru, istek, emir, hayret, ünlem, görecelik gibi anlamlar içeren ifadeler bir önerme değildir.

Geçmiş yıllara ve bu yıla ait kısa bilgilerin ve hatırlatmaların yer aldığı kısım.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(Gotfrit Vilhelm Laypnis)
(1646-1716)

Ünlü bir Alman filozofu ve bi-

Bilim insanlarının matematikle ilgili bilimsel çalışmalarının yer aldığı kısım

ALIŞTIRMALAR

Kazanım sonlarında öğrenilen bilgilerin pekiştirilmesine yönelik farklı türde soruların yer aldığı kısım

DEĞERLENDİRME SORULARI

Alt öğrenme alanlarının sonunda öğrenilen bilgileri değerlendirmek amacıyla hazırlanan çoktan seçmeli soruların yer aldığı kısım

EN İYİ SATRANÇÇI

Üç satranççıya, aralarında en iyi oyuncunun kim olduğu sorulur. Verilen yanıtlar şöyledir:

A : "En iyi ben değilim."

B : "En iyi C'dir."

C : "B yalan söylüyor.

İçlerinden yalnız biri doğru söylediğine göre en iyi satranççı kim?

Matematikle ilgili dikkat çekici ve ilginç soruların yer aldığı kısım

SAYILAR VE CEBİR

MANTIK

Neler Öğreneceğiz?

- Önerme, önermenin doğruluk değeri
- İki önermenin denkliği
- Bir önermenin değili
- Bileşik önermeler
- De Morgan Kuralları
- Koşullu önerme
- İki yönlü koşullu önerme
- Koşullu önermenin karşıtı
- Koşullu önermenin tersi
- Koşullu önermenin karşıt tersi
- Niceleyiciler
- Açık önermeler
- Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramları

Nerelerde Karşımıza Çıkar?

Günlük hayatta, doğru, mantıklı ve anlaşılır cümleler kurmakta, satranç, yapboz, zekâ küpü ve sudoku gibi akıl yürütme gerektiren oyunlarda, bilim, teknik ve felsefe alanında, matematiksel ifadelerin ispatlanmasında, bilgisayar ve elektronik araçların tasarımında mantığın temel kurallarından yararlanılır.

9.1.1. ÖNERMELER VE BİLEŞİK ÖNERMELER

Dünyada dostluktan daha büyük bir zenginlik yoktur. Dostların var ise kendini her zaman güvende hissedersin. Çevremizde tanıdığımız birçok insan ya da arkadaşımız vardır. Ancak bu insanların hepsi dostumuz değildir. Dostluk paylaşmak, güvenmek, fedakârlık ve açık sözlülüktür. Dostlar bencil değildir, birbirlerine değer verirler. Karşılıksız severler. Yanımızda olmasa da yanımızda hissederiz onları. Dostluk iyi ve kötü günde birlikte olmaktır. Kim gerçek bir dostu kaybetmek ister ki? Eğer gerçek bir dostunuz var ise onu asla bırakmayın.

- Yukarıdaki paragrafta geçen cümlelerden hangileri kesin bir hüküm bildirir?
- Kesin hüküm bildiren cümlelerde kullanılan bağlaçların cümleye kattığı anlamları söyleyiniz.

9.1.1.1. Önerme, Önermenin Doğruluk Değeri, İki Önermenin Denkliği ve Önermenin Değili

Önermeler ve Doğruluk Değeri

Bazı cümleler belli bir sonucu vurguladığı için kesin bir hüküm bildirmektedir. Kesin hüküm bildiren cümleler kesinlikle doğru ya da kesinlikle yanlıştır. Aşağıdaki cümleleri inceleyelim.

- Vatanımı çok seviyorum.
- Antalya, Ege Bölgesi'ndedir.
- Türkiye'nin üç tarafı denizlerle çevrilidir.
- Trabzon'u gezdiniz mi?

» Bu cümlelerden hangileri kesin bir hüküm bildirmektedir?

» Bu cümlelerden hangileri doğru hangileri yanlış hüküm bildirir? Açıklayınız.

Sembol ve Gösterimler

p

p' (veya $\sim p$)

$\equiv$

$\forall$

$\exists$

$\wedge$

$\vee$

$\veebar$

$\Rightarrow$

$\Leftrightarrow$

Bilgi Kutusu

Doğru ya da yanlış kesin hüküm bildiren ifadelere önerme adı verilir. Önermeler p, q, r, s, t, ... gibi küçük harflerle gösterilir. Bir önermenin doğru ya da yanlış olması, bu önermenin doğruluk değeri ile ilgilidir. Önerme doğru hüküm bildiriyorsa bu önermenin doğruluk değeri D ya da 1; yanlış hüküm bildiriyorsa bu önermenin doğruluk değeri Y ya da 0 ile gösterilir.

Örnek

Aşağıda verilen ifadelerden önerme olanları belirleyelim.

a) 2 tek sayı değildir.

b) En küçük asal sayı 1 midir?

c) Bu romanı çok beğendim.

ç) Her doğal sayı bir tam sayıdır.

d) Bugün yağmur yağabilir.

Çözüm

a ve ç maddelerindeki ifadeler doğru ya da yanlış kesin bir hüküm bildirdiğinden birer önermedir.

> ! Soru, istek, emir, hayret, ünlem, görecelik gibi anlamlar içeren ifadeler bir önerme değildir.

Örnek

Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulalım.

p : "İki negatif sayının çarpımı pozitiftir."

q : "İki çift sayının toplamı tek sayıdır."

r : "$3 - 2 \cdot 4 + 5 = 9$"

s : "282 sayısı 3 e kalansız bölünür."

Çözüm

p ve s önermeleri doğru bir hüküm bildirdiğinden doğruluk değeri 1, q ve r önermeleri yanlış bir hüküm bildirdiğinden doğruluk değeri 0 dır.

Sıra Sizde

Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

p : "$4 \cdot 2 - 2 \cdot 5 + 1 < 0$"

q : "21 asal sayıdır."

r : "Dik açının ölçüsü 90° dir."

s : "$2^3 = 6$"

Örnek

p önermesinin kaç farklı doğruluk durumu olacağını bulalım.

Çözüm

p önermesinin doğru ya da yanlış olmak üzere 2 farklı doğruluk durumu vardır. Bu durum doğruluk tablosu ile yandaki gibi gösterilir.

p
1
0

Gottfried Wilhelm Leibniz
(Gotfrit Vilhelm Laypnis)
(1646-1716)

Ünlü bir Alman filozofu ve bilim dünyasının en önemli sistemci düşünürlerinden biridir. Matematik, metafizik ve mantık alanlarında ileri sürdüğü yeni düşünce ve görüşleriyle tanınır. Yaptığı çalışmalarla mantık ve matematik biliminin sembollerle gösterimine büyük katkıda bulunmuştur. Eşitlik için = , çarpma için x simgelerini ve "fonksiyon, koordinat" gibi terimleri ortaya koyan bilim insanıdır.

Hesap makinesini geliştirerek bilgisayarın icadı için ilk adımı atmıştır. Leibniz matematik ve mantık dışında hukuk, din, siyaset, tarih, edebiyat, metafizik ve kuramsal felsefe konularında da birçok eser bırakmıştır.

Örnek

p ve q önermelerinin kaç farklı doğruluk durumu olacağını bulalım.

Çözüm

p önermesinin 2, q önermesinin 2 farklı doğruluk durumu vardır. Bu nedenle p ve q önermelerinin birlikte $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ farklı doğruluk durumu vardır.

Bu durum doğruluk tablosu ile yandaki gibi gösterilir.

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

Örnek

p, q ve r önermelerinin kaç farklı doğruluk durumu olacağını bulalım.

Çözüm

p önermesinin 2, q önermesinin 2, r önermesinin 2 farklı doğruluk durumu vardır.
Bu nedenle p, q ve r önermelerinin birlikte $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ farklı doğruluk durumu vardır.
Bu durum doğruluk tablosu ile yandaki gibi gösterilir.

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Bilgi Kutusu

n tane farklı önermenin birlikte 2^n tane doğruluk durumu vardır.

Örnek

n farklı önerme için 64 farklı doğruluk durumu olduğuna göre n yi bulalım.

Çözüm

n tane farklı önermenin 2^n tane doğruluk durumu olduğundan

$2^n = 64 \Rightarrow 2^n = 2^6 \Rightarrow n = 6$ olur.

Sıra Sizde

5 farklı önermenin birlikte kaç farklı doğruluk durumu olacağını hesaplayınız.

İki Önermenin Denkliği

p : "$-13 - 5 \cdot 2 = -36$"

q : "91 asal sayıdır."

» p ile q önermelerinin doğruluk değerleri nedir?

» p ile q önermeleri ile doğruluk değeri aynı olan başka bir önerme söyleyiniz.

Bilgi Kutusu

Doğruluk değeri aynı olan önermelere **denk önermeler** denir.

p ve q önermelerinin doğruluk değerleri aynı ise $p \equiv q$ şeklinde gösterilir ve "p denktir q" diye okunur.

Örnek

Aşağıdaki önermelerden denk olanları belirleyelim.

p : "10 tane rakam vardır."

q : "$-3^2 = -9$"

r : "Bütün asal sayılar tek sayıdır."

s : "$-2 + 2 = 4$"

Çözüm

p ve q önermeleri doğru hüküm bildirdiğinden $p \equiv 1$ ve $q \equiv 1$,

r ve s önermeleri yanlış hüküm bildirdiğinden $r \equiv 0$ ve $s \equiv 0$ olur.

p ile q ve r ile s önermelerinin doğruluk değerleri aynı olduğundan $p \equiv q$ ve $r \equiv s$ olur.

Sıra Sizde

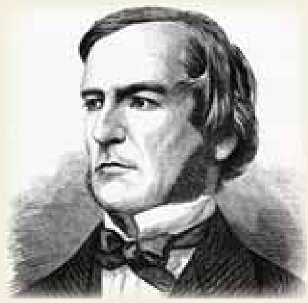
Aşağıdaki önermelerden denk olanları belirleyiniz.

p : "Güneş, doğudan batar."

q : "$|-8| = 8$"

r : "Bir dikdörtgenin bütün açıları 90° dir."

s : "–8, –2 den büyüktür."



George Boole
(Corç Bul)
(1815-1864)

Lincoln'da doğan George Boole, bir İngiliz matematikçisi, mantıkçısı ve eğitimcisidir. Modern simgesel mantığın kurulmasına katkıda bulunmuş ve mantık cebirini geliştirmiştir. Günümüzde Boole cebiri adıyla anılan mantık cebiri, sayısal bilgisayar devreleri tasarımının matematiksel temelini oluşturur.

Boole, 1847 yılında Mantığın Matematiksel Analizi adlı bir kitapçık yayınlamıştır. Boole, buluşları ile mantık cebirinin doğmasını sağlamıştır. Mantık cebiri günümüzde olasılıklar kuramı, kümeler geometrisi ve bilişim kuramı için son derece değerlidir. Ayrıca, elektronik sayısal bilgisayarlarda kullanılan devrelerin tasarımı için gerekli olan temeli oluşturmaktadır.

! Bir p önermesinin doğruluk değeri doğru ise $p \equiv 1$, yanlış ise $p \equiv 0$ ile gösterilir.

Bir Önermenin Değili

p : "İki noktadan bir doğru geçmez."

q : "Ankara, Türkiye'nin başkentidir."

» p ile q önermelerinin hükümlerinin olumsuzu alınarak başka önermeler yazılabilir mi?

Bilgi Kutusu

Bir önermenin hükmünün olumsuzu alınarak oluşturulan yeni önermeye **bu önermenin değili (olumsuzu)** denir. p önermesinin değili p' ya da ~p ile gösterilir ve "p nin değili" şeklinde okunur.

! $p \equiv 1$ ise $p' \equiv 0$,
$q \equiv 0$ ise $q' \equiv 1$ olur.

Örnek

Aşağıdaki önermelerin değilini bulalım.

p : "Üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamı 180° dir."

q : "Kare bir dikdörtgendir."

r : "$12 - 3 \cdot 4 = 36$"

Çözüm

Verilen önermelerin hükümlerinin olumsuzunu alırsak

p' : "Üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamı 180° değildir."

q' : "Kare bir dikdörtgen değildir."

r' : "$12 - 3 \cdot 4 \neq 36$" olur.

Örnek

p : "11 asal sayıdır." önermesi için $(p')'$ önermesini bulalım.

! $(p')' \equiv p$

Çözüm

p' : "11 asal sayı değildir."

$(p')'$: "11 asal sayıdır."

Görüldüğü gibi bir önermenin değilinin değili, önermenin kendisine denktir.

Sıra Sizde

Aşağıdaki önermelerin değillerini yazınız.

p : "$3 - 2 \cdot 4 \geq -2$"

q : "$(-4)^3 < 0$"

1. Aşağıdaki ifadelerden önerme olanları belirtiniz.

a) En küçük asal sayı 3 tür.

b) Gel! Ne olursan ol, yine gel!

c) 1111 sayısının 3 ile bölümünden kalan 1 dir.

ç) $3 \cdot 7 - 2^2 = 9$

d) Çok yorgunum.

e) Cumhuriyet, 29 Ekim 1923'te ilan edilmiştir.

2. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini yanlarındaki kutuya yazınız.

☐ p : "$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$"

☐ q : "$-3 < -2$"

☐ r : "Kanguru dört ayaklı bir hayvandır."

☐ s : "Bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir."

☐ t : "$-5^2 = 25$"

☐ e : "Dikdörtgen, beş kenarlıdır."

3. Aşağıdaki önermelerden hangilerinin birbirine denk önerme olduğunu bulunuz.

p : "39 asal sayıdır."

q : "$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$"

r : "Bir beşgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 540° dir."

s : "İki basamaklı en küçük tam sayı –10 dur."

4. Aşağıdaki önermelerin değillerini yazınız.

p : "$-5 > -6$"

q : "İki basamaklı tam kare doğal sayıların toplamı 271 dir."

r : "$-2 + 3.5 \leq 0$"

s : "43 asal sayı değildir."

t : "1 gün 1440 dakikadır."

5. n tane farklı önermenin birlikte 256 farklı doğruluk durumu olduğuna göre n kaçtır?

9.1.1.2. Bileşik Önermeler

- Van Gölü Türkiye'nin en büyük gölüdür ve Doğu Anadolu Bölgesi'ndedir.
- Antalya'dan Kıbrıs'a hava yolu ya da deniz yolu ile gidilir.
- Ankara'dan İstanbul'a giderken Bolu'yu görmek ancak ve ancak kara yolu ile gidilmesiyle mümkündür.
- İnternet sürekli kullanılır ise insanları asosyal yapar.
- Satranç oynamak veya sudoku oynamak düşünme biçimini geliştirir.

» Yukarıdaki cümlelerde hangi bağlaçlar kullanılmıştır?

» Ve, veya, ya da, ise, ancak ve ancak bağlaçlarıyla bağlanan cümleler birer önerme olur mu? Açıklayınız.

Bilgi Kutusu

İki veya daha fazla önermenin "ve", "veya", "ya da", "ise", "ancak ve ancak" bağlaçlarından en az biri ile birbirine bağlanmasıyla oluşturulan yeni önermelere **bileşik önermeler** denir.

"ve" Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önermeler

Bilgi Kutusu

p ile q önermelerinin "ve" bağlacı ile bağlanmasıyla oluşan bileşik önermeye "p ve q" bileşik önermesi denir ve $p \wedge q$ şeklinde gösterilir. $p \wedge q$ önermesinin doğruluk tablosu yandaki gibidir. $p \wedge q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri, p ve q önermelerinin her ikisinin de doğru olması durumunda doğru, diğer durumlarda yanlış olur.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Örnek

p : "3 + 6 = 9"

q : "9 asal sayıdır."

önermeleri için $p \wedge q$ önermesini yazıp doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$p \wedge q$: "3 + 6 = 9 ve 9 asal sayıdır." şeklinde yazılır.

$p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ olduğundan $p \wedge q \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $(0 \wedge 1) \wedge 0$ **b)** $(0' \wedge 1) \wedge (1 \wedge 1)$

c) $(1' \wedge 1) \wedge 0$ **ç)** $(0 \wedge 0') \wedge (0' \wedge 1)$

Örnek

"Bir zar atma deneyinde zarın 3 ten küçük bir sayı gelme olasılığı $\frac{1}{3}$ ve 19 asal sayıdır." bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

Verilen bileşik önermeyi iki ayrı önerme olarak yazalım. Bu durumda

p : "Bir zar atma deneyinde zarın 3 ten küçük bir sayı gelme olasığı $\frac{1}{3}$ tür.",

q : "19 asal sayıdır." olur.

$p \equiv 1$ ve $q \equiv 1$ olduğundan $p \wedge q \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$ olur.

"ve" Bağlacı İle Kurulan Bileşik Önermelerin Özellikleri

Tek Kuvvet Özelliği

Yandaki doğruluk tablosundan görüldüğü gibi her p önermesi için $p \wedge p \equiv p$ tir. Bu özelliğe **"ve" nin tek kuvvet özelliği** denir.

p	p	$p \wedge p$
1	1	1
0	0	0

$p \equiv p \wedge p$

Değişme Özelliği

Yandaki doğruluk tablosundan görüldüğü gibi her p, q önermeleri için $p \wedge q \equiv q \wedge p$ tir. Bu özelliğe **"ve"nin değişme özelliği** denir.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

Birleşme Özelliği

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Yukarıdaki doğruluk tablosundan görüldüğü gibi her p, q, r önermeleri için $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ tir. Bu özelliğe **"ve" nin birleşme özelliği** denir.

EN İYİ SATRANÇÇI

Üç satranççıya, aralarında en iyi oyuncunun kim olduğu sorulur. Verilen yanıtlar şöyledir:

A : "En iyi ben değilim."

B : "En iyi C dir."

C : "B yalan söylüyor.

İçlerinden yalnız biri doğru söylediğine göre en iyi satranççı kim?

!
$p \wedge p' \equiv 0$
$p \wedge 0 \equiv 0$
$p \wedge 1 \equiv p$

Örnek

Aşağıda verilen bileşik önermelerin en sade hâllerini yazalım.

a) $0 \wedge (p \wedge 0)$ **b)** $(p \wedge p') \wedge (p \wedge 0')$

Çözüm

a) $0 \wedge (p \wedge 0) \equiv 0 \wedge 0 \equiv 0$ olur.

b) $(p \wedge p') \wedge (p \wedge 0') \equiv 0 \wedge (p \wedge 1) \equiv 0 \wedge p \equiv 0$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki önermelerin en sade hâllerini bulunuz.

a) $(p \wedge 0') \wedge (0' \wedge 1)$ **b)** $(p' \wedge 1) \wedge (p \wedge 0)$

c) $(p \wedge p') \wedge (1 \wedge 0)$ **ç)** $(p \wedge 1) \wedge (p \wedge 0)$

"veya" Bağlacı İle Kurulan Bileşik Önermeler

Bilgi Kutusu

p ile q önermelerinin "veya" bağlacı ile bağlanmasıyla oluşan bileşik önermeye "p veya q" bileşik önermesi denir ve $p \vee q$ şeklinde gösterilir. $p \vee q$ önermesinin doğruluk tablosu yandaki gibidir. $p \vee q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri, p ve q önermelerinin her ikisinin de yanlış olması durumunda yanlış, diğer durumlarda doğru olur.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Örnek

p : "315 sayısı, 3 ile kalansız bölünür."

q : "$(-2)^3 + 8 = 16$"

önermeleri için $p \vee q$ önermesini yazıp doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$p \vee q$: "315 sayısı, 3 ile kalansız bölünür veya $(-2)^3 + 8 = 16$" şeklinde yazılır. $p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ olduğundan $p \vee q \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$ bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $(0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0)$ **b)** $(1' \vee 0) \vee 1$

c) $(0' \vee 1) \wedge (1 \vee 1)$ **ç)** $(0' \wedge 1) \vee (1' \wedge 0)$

"veya" Bağlacı İle Kurulan Bileşik Önermelerin Özellikleri

Tek Kuvvet Özelliği

Yandaki doğruluk tablosundan görüldüğü gibi her p önermesi için $p \vee p \equiv p$ tir. Bu özelliğe **"veya"nın tek kuvvet özelliği** denir.

p	p	$p \vee p$
1	1	1
0	0	0

$p \equiv p \vee p$

Değişme Özelliği

Yandaki doğruluk tablosundan görüldüğü gibi her p, q önermeleri için $p \vee q \equiv q \vee p$ tir. Bu özelliğe **"veya"nın değişme özelliği** denir.

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

$p \vee q \equiv q \vee p$

Birleşme Özelliği

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

Yukarıdaki doğruluk tablosundan görüldüğü gibi her p, q, r önermeleri için $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ tir. Bu özelliğe **"veya"nın birleşme özelliği** denir.

Örnek

Aşağıda verilen bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulalım.

a) $(p \vee 1) \vee (p' \vee p)$ **b)** $(0 \vee p) \vee (p \vee 0')$

Çözüm

a) $(p \vee 1) \vee (p' \vee p) \equiv 1 \vee 1 \equiv 1$ olur.

b) $(0 \vee p) \vee (p \vee 0') \equiv p \vee (p \vee 1) \equiv p \vee 1 \equiv 1$ olur.

!
$p \vee p' \equiv 1$
$p \vee 0 \equiv p$
$p \vee 1 \equiv 1$

Sıra Sizde

Aşağıda verilen önermelerin en sade hâllerini bulunuz.

a) $(p' \vee 0') \vee (1 \vee p)$ **b)** $p \vee (p' \vee q)$

c) $(q' \vee 1) \vee (q \vee 0')$ **ç)** $(p' \vee q) \vee (p \vee q')$

"ve" nin "veya" Üzerine Dağılma Özelliği

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Yukarıdaki doğruluk tablosundan görüldüğü gibi her p, q, r önermeleri için $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ tir. Bu özelliğe **"ve" nin "veya" üzerine soldan dağılma özelliği** denir.

Sıra Sizde

"ve" nin "veya" üzerine sağdan dağılma özelliğini doğruluk tablosu kullanarak gösteriniz.

"veya" nın "ve" Üzerine Dağılma Özelliği

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Yukarıdaki doğruluk tablosundan görüldüğü gibi her p, q, r önermeleri için $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ tir. Bu özelliğe **"veya" nın "ve" üzerine soldan dağılma özelliği** denir.

Sıra Sizde

"veya" nın "ve" üzerine sağdan dağılma özelliğini doğruluk tablosu kullanarak gösteriniz.

Örnek

$(p \vee q') \wedge (p \vee q)$ önermesinin en sade hâlini bulalım.

Çözüm

$(p \vee q') \wedge (p \vee q) \equiv p \vee (q' \wedge q) \equiv p \vee 0 \equiv p$ olur.

De Morgan Kuralları

p	q	p'	q'	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1

$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ $\qquad$ $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$

Yukarıdaki doğruluk tablosundan görüldüğü gibi her p, q önermeleri için

$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$

$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$

tir. Bu kurallara **De Morgan kuralları** denir.

Augustus De Morgan
(Agustus Dö Morgın)
(1806-1871)

İngiliz matematikçi ve mantıkçısıdır. Mantıkta kendi ismiyle anılan De Morgan kurallarını ortaya koymuş, matematiksel mantığın doğuşuna öncülük etmiştir. İlk çalışmalarından olan "Aritmetiğin Ögeleri" adlı eseri sayıları ve büyüklük kavramlarını işlemesi bakımından önemlidir. Cebir Ögeleri, Formel Mantık, Trigonometri ve İkili Cebir eserlerinden bazılarıdır.

Örnek

$(p' \wedge q)' \wedge (p \vee q')$ önermesinin en sade hâlini bulalım.

Çözüm

$(p' \wedge q)' \wedge (p \vee q') \equiv (p \vee q') \wedge (p \vee q') \equiv p \vee (q' \wedge q') \equiv p \vee q'$ olur.

Örnek

$(p' \wedge q) \wedge (p \vee q)'$ önermesinin en sade hâlini bulalım.

Çözüm

$(p' \wedge q) \wedge (p \vee q)' \equiv (p' \wedge q) \wedge (p' \wedge q') \equiv p' \wedge (q \wedge q') \equiv p' \wedge 0 \equiv 0$ olur.

Sıra Sizde

$(p' \vee q)' \vee (p \wedge q)$ bileşik önermesini en sade biçimde yazınız.

Örnek

$(p' \vee q')' \wedge [(p' \vee q) \wedge p]$ önermesinin en sade hâlini bulalım.

Çözüm

$(p' \vee q')' \wedge [(p' \vee q) \wedge p] \equiv (p \wedge q) \wedge [(p' \vee q) \wedge p]$

$\equiv (p \wedge q) \wedge [(p' \wedge p) \vee (q \wedge p)]$

$\equiv (p \wedge q) \wedge [0 \vee (q \wedge p)]$

$\equiv (p \wedge q) \wedge (q \wedge p) \equiv p \wedge q$ olur.

"ya da" Bağlacı ile Oluşan Bileşik Önermeler

Bilgi Kutusu

p ile q önermelerinin "ya da" bağlacı ile bağlanmasıyla oluşan bileşik önermeye "p ya da q" bileşik önermesi denir ve $p \veebar q$ şeklinde gösterilir. $p \veebar q$ önermesinin doğruluk tablosu yandaki gibidir.

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$p \veebar q$ önermesinin doğruluk değeri, p ve q önermelerinin her ikisinin de doğruluk değerlerinin aynı olması durumunda yanlış, diğer durumlarda doğru olur.

Örnek

p: "İki basamaklı en küçük tam sayı 10 dur."

q: "3 + 1 = 4"

önermeleri için $p \veebar q$ önermesini yazıp doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$p \veebar q$: "İki basamaklı en küçük tam sayı 10 dur ya da 3 + 1 = 4"

şeklinde yazılır. $p \equiv 0$ ve $q \equiv 1$ olduğundan $p \veebar q \equiv 0 \veebar 1 \equiv 1$ bulunur.

Örnek

Aşağıda verilen bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulalım.

a) "3 + 1 = 4 ya da 3·4 = 12"

b) "8 > 7 ya da $3^2 = 6$"

Çözüm

a) Verilen bileşik önermeyi iki ayrı önerme olarak yazalım.

p: "3 + 1 = 4" ve q: "3·4 = 12" olur.

$p \equiv 1$ ve $q \equiv 1$ olduğundan $p \veebar q \equiv 1 \veebar 1 \equiv 0$ bulunur.

b) Verilen bileşik önermeyi iki ayrı önerme olarak yazalım.

r: "8 > 7" ve s: "$3^2 = 6$" olur.

$r \equiv 1$ ve $s \equiv 0$ olduğundan $r \veebar s \equiv 1 \veebar 0 \equiv 1$ bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $(1 \veebar 0) \veebar 1$ **b)** $(1' \veebar 1) \vee (0 \veebar 1)$

c) $(1 \veebar 1) \wedge (0 \veebar 0)$ **ç)** $(1' \veebar 0) \wedge (0' \veebar 0)$

"ya da" Bağlacı İle Kurulan Bileşik Önermelerin Özellikleri

Değişme Özelliği

Yandaki doğruluk tablosundan görüldüğü gibi her p, q önermeleri için $p \veebar q \equiv q \veebar p$ tir. Bu özelliğe **"ya da" nın değişme özelliği** denir.

p	q	$p \veebar q$	$q \veebar p$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

$p \veebar q \equiv q \veebar p$

Birleşme Özelliği

p	q	r	$p \veebar q$	$q \veebar r$	$(p \veebar q) \veebar r$	$p \veebar (q \veebar r)$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

$(p \veebar q) \veebar r \equiv p \veebar (q \veebar r)$

Yukarıdaki doğruluk tablosundan görüldüğü gibi her p, q, r önermeleri için $(p \veebar q) \veebar r \equiv p \veebar (q \veebar r)$ tir. Bu özelliğe **"ya da" nın birleşme özelliği** denir.

Örnek

Aşağıda verilen bileşik önermelerin en sade hâllerini yazalım.

a) $(p \veebar p)' \veebar q$ **b)** $(p \veebar 1) \veebar (p \veebar 0)$

c) $(p \veebar p') \veebar q'$ **ç)** $0' \veebar (p \veebar 1)$

Çözüm

a) $(p \veebar p)' \veebar q \equiv 0' \veebar q \equiv 1 \veebar q \equiv q'$ olur.

b) $(p \veebar 1) \veebar (p \veebar 0) \equiv p' \veebar p \equiv 1$ olur.

c) $(p \veebar p') \veebar q' \equiv 1 \veebar q' \equiv q$ olur.

ç) $0' \veebar (p \veebar 1) \equiv 1 \veebar p' \equiv p$ olur.

!

$p \veebar p' \equiv 1$

$p \veebar 1 \equiv p'$

$p \veebar 0 \equiv p$

$p \veebar p \equiv 0$

Sıra Sizde

Aşağıda verilen önermelerin en sade hâllerini bulunuz.

a) $(0' \veebar p) \wedge 1$ **b)** $(p \veebar 1) \vee (1' \veebar p)$

c) $(p \vee 1) \veebar (p \wedge 0)$ **ç)** $(p \vee p') \veebar (q \vee q')$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini yanlarındaki kutuya yazınız.

☐ p : "$20 \div (-2) = -10$ ve 5 tek sayıdır."

☐ q : "3 tek sayıdır ya da $3^3 = 9$ tir."

☐ r : "$5^2 \cdot 5^6 = 5^8$ veya $\sqrt{625} = 25$ tir."

☐ s : "$1^{17} = 17$ ya da 1 asal sayıdır."

☐ t : "Üç basamaklı rakamları farklı en küçük doğal sayı 102 ve $(-5)^0 = -5$ tir."

2. $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, $r \equiv 1$ olduğuna göre $(p \vee q)' \veebar (p' \wedge r)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

3. $(p' \vee q) \wedge q' \equiv 1$ olduğuna göre $(p' \wedge q) \veebar (p \vee q)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

4. Aşağıdaki önermelerin en sade şeklini yazınız.

a) $(p \wedge q') \vee (q \vee p')'$

b) $[p \wedge (p' \vee q)] \vee (p \vee q')'$

c) $p' \wedge (q \vee p')'$

ç) $(p \veebar p')' \vee (p \veebar p)$

5. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $(p' \vee q) \wedge (p \wedge q')$

b) $p' \wedge (q \vee p')'$

6. $(p \wedge q)' \vee (r' \wedge q) \equiv 0$ olduğuna göre p, q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

7. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $(1' \vee 0') \veebar (0 \wedge 0)$

b) $1' \wedge (0 \vee 1')'$

c) $(1 \veebar 1) \vee [0' \wedge (1 \veebar 0)']$

ç) $0 \vee [1 \veebar (0 \wedge 1)]$

9.1.1.3. Koşullu Önerme ve İki Yönlü Koşullu Önerme

Koşullu Önerme

p : "Alp düzenli ders çalışır."

q : "Alp başarılı olur."

» p ile q önermeleri ile "ise" bağlacını kullanarak yeni bir önerme oluşturunuz.

Bilgi Kutusu

p ile q önermelerinin "ise" bağlacı ile bağlanmasıyla oluşan bileşik önermeye **koşullu önerme** denir ve $p \Rightarrow q$ şeklinde gösterilir.

$p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu yandaki gibidir. $p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri, p önermesinin doğru q önermesinin yanlış olması durumunda yanlış, diğer durumlarda doğru olur.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Örnek

p: "2 + 3 = 5"

q: "$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{1}{3}$"

önermeleri için $p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$p \Rightarrow q$: "$2 + 3 = 5$ ise $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{1}{3}$" olur.

$p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ olduğundan $p \Rightarrow q \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0$ olur.

Örnek

r: "11 < 10 ise 11 çift tam sayıdır." bileşik önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

r bileşik önermesini, iki önerme şeklinde yazalım.

p : "11 < 10"

q : "11 çift tam sayıdır." olur.

$p \equiv 0$ ve $q \equiv 0$ olduğundan $p \Rightarrow q \equiv 0 \Rightarrow 0 \equiv 1$ olur.

Örnek

p : "Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir."

q : "Düzgün altıgenin bir dış açısının ölçüsü 60° dir."

r : "Beşgenin bir köşesinden en fazla 3 tane köşegen çizilebilir."

önermeleri için aşağıda verilen bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulalım.

a) $p' \Rightarrow q$ **b)** $(p \Rightarrow q) \vee r$

c) $(q' \Rightarrow r) \wedge p$ **ç)** $(r \Rightarrow q') \Rightarrow p'$

Çözüm

Verilen önermeler için $p \equiv 1$, $q \equiv 1$ ve $r \equiv 0$ olduğundan

a) $p' \Rightarrow q \equiv 0 \Rightarrow 1 \equiv 1$ olur.

b) $(p \Rightarrow q) \vee r \equiv (1 \Rightarrow 1) \vee 0 \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$ olur.

c) $(q' \Rightarrow r) \wedge p \equiv (0 \Rightarrow 0) \wedge 1 \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$ olur.

ç) $(r \Rightarrow q') \Rightarrow p' \equiv (0 \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0$ olur.

Örnek

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ olduğunu doğruluk tablosu ile gösterelim.

Çözüm

p	q	p'	p ⇒ q	p' ∨ q
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$

Doğruluk tablosundan görüldüğü gibi $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ tir.

Bilgi Kutusu

Her p, q önermeleri için $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ tir.

Örnek

$p \Rightarrow (p \wedge q)$ önermesinin en sade şeklini yazalım.

Çözüm

$p \Rightarrow (p \wedge q) \equiv p' \vee (p \wedge q) \equiv (p' \vee p) \wedge (p' \vee q) \equiv 1 \wedge (p' \vee q) \equiv p' \vee q$ olur.

Örnek

Aşağıdaki bileşik önermelerin en sade hâllerini bulalım.

a) $(p \Rightarrow 1) \veebar (p \Rightarrow p)$ **b)** $(1 \Rightarrow p) \wedge (0 \Rightarrow p)'$

c) $(1 \Rightarrow p) \vee (1 \Rightarrow p')'$ **ç)** $(p \Rightarrow 1) \Rightarrow (q \veebar 0)$

Çözüm

a) $(p \Rightarrow 1) \veebar (p \Rightarrow p) \equiv (p' \vee 1) \veebar (p' \vee p) \equiv 1 \veebar 1 \equiv 0$ olur.

b) $(1 \Rightarrow p) \wedge (0 \Rightarrow p)' \equiv (1' \vee p) \wedge (0' \vee p)' \equiv (0 \vee p) \wedge (1 \vee p)'$

$\equiv p \wedge 1' \equiv p \wedge 0 \equiv 0$ olur.

c) $(1 \Rightarrow p) \vee (1 \Rightarrow p')' \equiv (1' \vee p) \vee (1' \vee p')' \equiv (0 \vee p) \vee (1 \wedge p)$

$\equiv p \vee p \equiv p$ olur.

ç) $(p \Rightarrow 1) \Rightarrow (q \veebar 0) \equiv (p' \vee 1)' \vee q \equiv 1' \vee q \equiv 0 \vee q \equiv q$ olur.

$p \Rightarrow p \equiv 1$

$p \Rightarrow 0 \equiv p'$

$0 \Rightarrow p \equiv 1$

$p \Rightarrow 1 \equiv 1$

$1 \Rightarrow p \equiv p$

Örnek

$(p \wedge q)' \Rightarrow (q \vee r) \equiv 0$ olduğuna göre $(q \wedge r') \Rightarrow (p \veebar r)'$ önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

$(p \wedge q)' \Rightarrow (q \vee r) \equiv 0$ ise $(p \wedge q)' \equiv 1$ ve $(q \vee r) \equiv 0$ olur.

$q \vee r \equiv 0$ ise $q \equiv 0$ ve $r \equiv 0$ bulunur.

$(p \wedge q)' \equiv 1$ ise $(p \wedge 0)' \equiv 1$ olur. $p \wedge 0 \equiv 0$ ise $p \equiv 0$ bulunur.

$(q \wedge r') \Rightarrow (p \veebar r)' \equiv (0 \wedge 0') \Rightarrow (0 \veebar 0)' \equiv (0 \wedge 1) \Rightarrow 0' \equiv 0 \Rightarrow 1 \equiv 1$ bulunur.

Sıra Sizde

$(p' \Rightarrow q)' \wedge r \equiv 1$ olduğuna göre $(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge p)$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

Koşullu Önermenin Karşıtı, Tersi ve Karşıt Tersi

Örnek

"Bebek ağlıyor ise karnı acıkmıştır." bileşik önermesini oluşturan p: "Bebek ağlıyor." ve q: "Karnı acıkmıştır." önermeleri için $q \Rightarrow p$, $p' \Rightarrow q'$ ve $q' \Rightarrow p'$ önermelerini yazalım.

Çözüm

$q \Rightarrow p$: "Bebeğin karnı acıkmış ise bebek ağlıyordur."

$p' \Rightarrow q'$: "Bebek ağlamıyor ise karnı acıkmamıştır."

$q' \Rightarrow p'$: "Bebeğin karnı acıkmamış ise bebek ağlamıyordur."

Bilgi Kutusu

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı $q \Rightarrow p$,

$p \Rightarrow q$ önermesinin tersi $p' \Rightarrow q'$,

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$ dir.

! $(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$

Örnek

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtını, tersini ve karşıt tersini doğruluk tablosu yardımıyla gösterelim.

Çözüm

p	q	p'	q'	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p' \Rightarrow q'$	$q' \Rightarrow p'$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1

$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$

Yukarıdaki doğruluk tablosundan görüldüğü gibi, bir koşullu önerme karşıt tersine denktir.

Sıra Sizde

p: "KLMN bir karedir."

q: "Karenin bütün açılarının ölçüsü 90° dir."

Yukarıda verilen p ile q önermeleriyle oluşturulan $p \Rightarrow q$ önermesini yazınız. $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin karşıtını, tersini, karşıt tersini yazınız.

İki Yönlü Koşullu Önerme

p : "$\widehat{ABC}$ eşkenar üçgendir."

q : "$\widehat{ABC}$ nin kenar uzunlukları birbirine eşittir."

» p ile q önermeleri ile "ancak ve ancak" bağlacını kullanarak yeni bir önerme oluşturunuz.

Bilgi Kutusu

p ile q önermelerinin "ancak ve ancak" bağlacı ile bağlanmasıyla oluşan bileşik önermeye **iki yönlü koşullu önerme** denir ve $p \Leftrightarrow q$ şeklinde gösterilir.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$p \Leftrightarrow q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu yandaki gibidir. $p \Leftrightarrow q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri, p ve q önermelerinin her ikisinin doğruluk değerlerinin aynı olması durumunda doğru, diğer durumlarda yanlış olur.

Örnek

p: "Eşkenar üçgenin iç açılarının ölçüleri eşittir."

q: "Eşkenar üçgenin kenar uzunlukları eşittir."

önermeleri için $p \Leftrightarrow q$ önermesini yazalım ve $p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk değerini belirleyelim.

Çözüm

$p \Leftrightarrow q$: "Eşkenar üçgenin iç açılarının ölçüleri eşittir ancak ve ancak eşkenar üçgenin kenar uzunlukları eşittir." şeklinde yazılır.

$p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri, $p \equiv 1$ ve $q \equiv 1$ olduğundan
$p \Leftrightarrow q \equiv 1 \Leftrightarrow 1 \equiv 1$ olur.

Örnek

p: "$2^3 = 8$ ancak ve ancak 3 çift sayıdır." önermesinin doğruluk değerini bulalım.

Çözüm

p bileşik önermesini, iki önerme şeklinde yazalım.

p: "$2^3 = 8$" ve r: "3 çift sayıdır." olur.

$p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ olduğundan $p \Leftrightarrow q \equiv 1 \Leftrightarrow 0 \equiv 0$ olur.

Örnek

Aşağıda verilen ifadelerin doğruluk değerlerini bulalım.

a) $(0 \Rightarrow 1) \Leftrightarrow (0 \wedge 1)'$

b) $(0 \Leftrightarrow 1) \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow 1)'$

c) $(0 \veebar 0) \Leftrightarrow (1 \Rightarrow 1)$

ç) $(0 \vee 1) \Leftrightarrow (1 \wedge 1)'$

! $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

$p \Leftrightarrow q \equiv (p' \vee q) \wedge (q' \vee p)$

Çözüm

a) $(0 \Rightarrow 1) \Leftrightarrow (0 \wedge 1)' \equiv 1 \Leftrightarrow 0' \equiv 1 \Leftrightarrow 1 \equiv 1$ olur.

b) $(0 \Leftrightarrow 1) \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow 1)' \equiv 0 \Leftrightarrow 1' \equiv 0 \Leftrightarrow 0 \equiv 1$ olur.

c) $(0 \veebar 0) \Leftrightarrow (1 \Rightarrow 1) \equiv 0 \Leftrightarrow 1 \equiv 0$ olur.

ç) $(0 \vee 1) \Leftrightarrow (1 \wedge 1)' \equiv 1 \Leftrightarrow 1' \equiv 1 \Leftrightarrow 0 \equiv 0$ olur.

Örnek

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ olduğunu doğruluk tablosu ile gösterelim.

Çözüm

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$

Doğruluk tablosundan görüldüğü gibi $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$ tir.

Sıra Sizde

p : "$-5 < -1$"

q : "Her doğal sayı bir tam sayıdır."

r : "$3 + 2 \cdot 5 = 30$"

s : "1 en küçük asal sayıdır."

önermeleri için aşağıda verilen iki yönlü koşullu önermeleri yazıp doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $p \Leftrightarrow q$ **b)** $q \Leftrightarrow r$ **c)** $r \Leftrightarrow s$ **ç)** $r \Leftrightarrow p$

! $p \Leftrightarrow p \equiv 1$

$p \Leftrightarrow 1 \equiv p$

$p \Leftrightarrow 0 \equiv p'$

$p \Leftrightarrow p' \equiv 0$

Örnek

Aşağıda verilen denkliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $p \Leftrightarrow p \equiv 1$ **b)** $p \Leftrightarrow 1 \equiv p$ **c)** $p \Leftrightarrow 0 \equiv p'$ **ç)** $p \Leftrightarrow p' \equiv 0$

Çözüm

a) $p \Leftrightarrow p \equiv (p \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow p) \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$ olur.

b) $p \Leftrightarrow 1 \equiv (p \Rightarrow 1) \wedge (1 \Rightarrow p) \equiv 1 \wedge p \equiv p$ olur.

c) $p \Leftrightarrow 0 \equiv (p \Rightarrow 0) \wedge (0 \Rightarrow p) \equiv p' \wedge 1 \equiv p'$ olur.

ç) $p \Leftrightarrow p' \equiv (p \Rightarrow p') \wedge (p' \Rightarrow p) \equiv p' \wedge p \equiv 0$ olur.

Örnek

Aşağıda verilen denkliklerin doğru olduğunu doğruluk tablosu ile gösterelim.

- $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$
- $p \Leftrightarrow q \equiv p' \Leftrightarrow q'$
- $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow q'$

Çözüm

p	q	p'	q'	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$	$p' \Leftrightarrow q'$	$(p \Leftrightarrow q)'$	$p' \Leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow q'$
1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0

$(p \Leftrightarrow q) \equiv q \Leftrightarrow p \equiv p' \Leftrightarrow q'$ $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow q'$

Tablodan verilen denkliklerin doğru olduğu görülür.

Örnek

$p \Leftrightarrow 1 \equiv 0$ ve $(q \vee p)' \Rightarrow r \equiv 0$ olduğuna göre p, q, r önermelerinin doğruluk değerlerini bulalım.

Çözüm

$p \Leftrightarrow 1 \equiv 0$ ise $p \equiv 0$ olur. $(q \vee p)' \Rightarrow r \equiv 0$ ise $(q \vee 0)' \Rightarrow r \equiv 0$ olur.

$q \vee 0 \equiv q$ olduğundan $q' \Rightarrow r \equiv 0$ bulunur.

Buradan $q' \equiv 1$ ve $r \equiv 0$ olur. $q' \equiv 1$ ise $q \equiv 0$ bulunur.

Örnek

$p \Rightarrow q' \equiv 0$ ve $[(q \vee p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))] \equiv 0$ olduğuna göre p, q, r önermelerinin doğruluk değerlerini bulalım.

Çözüm

$p \Rightarrow q' \equiv 0$ ise $p \equiv 1$ ve $q' \equiv 0$ olur. Buradan $q' \equiv 0$ ise $q \equiv 1$ bulunur.

$[(q \vee p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))] \equiv 0$ ise $[(1 \vee 1) \Leftrightarrow (1 \Rightarrow (1 \wedge r))] \equiv 0$ olur.

Buradan $1 \Leftrightarrow (1 \Rightarrow r) \equiv 0$ olur. O hâlde $1 \Rightarrow r \equiv 0$ olup

$r \equiv 0$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen iki yönlü koşullu önermeleri, koşullu önermeler olarak yazınız.

a) p : "$x = -3 \Leftrightarrow x^2 = 9$"

b) q : "$x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$"

2. $p \equiv 0,\ q \equiv 1,\ r \equiv 1$ olduğuna göre aşağıda verilen bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $(p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow q$

b) $q \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$

c) $r \Leftrightarrow [(q \vee r) \Rightarrow p]$

3. p : "13 asal sayı ise 13 çift tam sayıdır." önermesinin tersini, karşıtını ve karşıt tersini yazınız.

4. $(p \wedge q') \Rightarrow q \equiv 0$ olduğuna göre p ve q nun doğruluk değerlerini bulunuz.

5. Aşağıda verilen koşullu önermeleri en sade biçimde yazınız.

a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge q')$

b) $(q' \Rightarrow p)' \vee (p \Rightarrow q)'$

c) $(p \vee q)' \Leftrightarrow [r' \Rightarrow (p' \wedge q)]$

ç) $(p \wedge q) \vee [p \wedge (p \Rightarrow q)]'$

6. $1 \Rightarrow [(p \wedge q) \Leftrightarrow q]$ önermesini en sade biçimde yazınız.

7. $[(p \Rightarrow 0)' \Leftrightarrow (q \Rightarrow 1)] \Leftrightarrow 1 \equiv p$ olduğunu doğruluk tablosu yardımıyla gösteriniz.

9.1.1.4. Her ve Bazı Niceleyicileri

Açık Önermeler

p(x) : "$x - 2 > 5$" önermesi için x yerine 4 yazılırsa "$4 - 2 > 5$" elde edilir.

- Bu durumda $x = 4$ için önermenin doğruluk değeri nedir?
- x yerine yazılacak farklı değerler için önermenin doğruluk değeri değişir mi?

! Denklemler ve eşitsizlikler açık önermedir.

Bilgi Kutusu

- İçinde en az bir değişken bulunduran ve bu değişkenlere verilen değerlere göre doğru veya yanlış hüküm bildiren önermelere **açık önermeler** denir.
- Açık önermeyi doğru yapan değerlerin kümesine, **açık önermenin doğruluk kümesi** denir.
- Değişkeni x olan bir açık önerme p(x), q(x), ... ile değişkeni x ve y olan bir açık önerme p(x, y), q(x, y), ... ile gösterilir.

Örnek

p(x) : "$x \in \mathbb{Z}$, $x - 16 = -6$" açık önermesini doğru yapan değerleri bulalım.

Çözüm

$x - 16 = -6 \Rightarrow x = -6 + 16 \Rightarrow x = 10$ olur.

Buna göre $x = 10$ için p(x) = "$x \in \mathbb{Z}$, $x - 16 = -6$" açık önermesi doğrudur.

Örnek

p(a, b) : "a ve b doğal sayı, $a + b = 3$" açık önermesi için p(0, 2) ve p(1, 2) ifadelerinin doğruluk değerlerini bulalım.

Çözüm

$p(a, b) = p(0, 2) = 0 + 2 = 2$ ve $2 \neq 3$ olduğundan $p(0, 2) \equiv 0$ bulunur.

$p(a, b) = p(1, 2) = 1 + 2 = 3$ ve $3 = 3$ olduğundan $p(1, 2) \equiv 1$ bulunur.

Friedrich Ludwig Gottolob Frege (Fridrih Ludvik Gottolop Frege) (1848-1925)

Modern mantığın kurucusu olan Alman matematikçi ve mantıkçıdır. Matematik felsefesi ve matematiksel mantık üzerine ilk bilimsel çalışmalarıyla mantığın temel kavramlarını ortaya çıkarmıştır. Niceleyicilerin ve değişkenlerin gösterimini bulmuştur.

Sıra Sizde

p(x): "$x \in \mathbb{N}$, $21 < x^2 + 1 < 59$" açık önermesini doğru yapan değerleri bulunuz.

Niceleyiciler

p : "Her asal sayı tektir."
q : "Her yıl on iki aydır."
r : "Bazı doğal sayılar 3 ten küçüktür."
s : "Bazı tam sayıların çift kuvveti negatiftir."

» p, q, r ve s önermelerindeki her ve bazı sözcüklerinin, önermeye verdiği anlamı açıklayınız.

Bilgi Kutusu

- "Her" terimine **evrensel niceleyici** denir ve $\forall$ sembolü ile gösterilir. "Her" niceleyicisi önüne geldiği elemanların tamamını anlatır.
- "Bazı" terimine **varlıksal niceleyici** denir ve $\exists$ sembolü ile gösterilir. "En az" niceleyicisi en az bir tane anlamında kullanılır.

Örnek

Sembolik mantık diliyle verilen "$\forall x \in \mathbb{N}$, $x > 0$" ifadesini sözel olarak ifade edelim.

Çözüm

Verilen ifade "Her doğal sayı 0 dan büyüktür." şeklinde sözel olarak ifade edilir.

Örnek

"Bazı tam sayılar 3 ten büyüktür." önermesini sembolik mantık diliyle ifade edelim.

Çözüm

Verilen ifade "$\exists x \in \mathbb{Z}$, $x > 3$" şeklinde sembolik mantık diliyle ifade edilir.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen önermeleri sembolik mantık diliyle ifade ediniz.

a) "Bütün tam sayılar negatiftir."

b) "Bazı tam sayılar 20 den küçüktür."

c) "Bütün tek tam sayıların karesi tektir."

Örnek

Aşağıda sözel olarak verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) p: "Bütün doğal sayıların karesi sıfıra eşittir."

b) q: "En az bir doğal sayının küpü kendisine eşittir."

Çözüm

a) $x = 2$ doğal sayısı için $2^2 = 4$ olduğundan p yanlış bir önermedir. O hâlde $p \equiv 0$ olur.

b) $1^3 = 1$ olduğundan en az bir tane doğal sayının küpü kendisine eşittir. O hâlde $q \equiv 1$ olur.

Örnek

Aşağıda sembolik mantık dilinde verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulalım.

a) p : "$\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 0$"

b) q : "$\exists x \in \mathbb{N}, x < 0$"

Çözüm

a) $x = 0$ doğal sayısı için $0^2 > 0 \Rightarrow 0 > 0$ yanlış önermedir. O hâlde $p \equiv 0$ olur.

b) $x < 0$ olacak şekilde en az bir tane x doğal sayısı bulunamaz. O hâlde $q \equiv 0$ olur.

Açık Önermenin Değili

q: "Her doğal sayının karesi kendisine eşittir."

p: "Bazı asal sayılar çifttir."

» p ve q önermelerinin değilini söyleyiniz.

Terim	Değili
$=$	$\neq$
$\vee$	$\wedge$
$\wedge$	$\vee$
$\exists$	$\forall$
$\forall$	$\exists$
$<$	$\geq$
$>$	$\leq$
$\leq$	$>$
$\geq$	$<$
$\equiv$	$\not\equiv$

Bilgi Kutusu

"Her" niceleyicisinin değili "bazı" niceleyicisi, "bazı" niceleyicisinin değili "her" niceleyicisidir. p(x) açık önermesi için

$[\forall x, p(x)]' \equiv \exists x, p'(x)$

$[\exists x, p(x)]' \equiv \forall x, p'(x)$

şeklinde olur.

Örnek

Aşağıda verilen önermelerin değilini bulalım.

a) p: "$\forall x \in \mathbb{N}, 2x - 1 < 11$"

b) q: "$\exists x \in \mathbb{N}, x^2 + 1 \geq 4$"

c) r: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$"

Çözüm

a) p': "$\exists x \in \mathbb{N}, 2x - 1 \geq 11$" olur.

b) q': "$\forall x \in \mathbb{N}, x^2 + 1 < 4$" olur.

c) r': "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$" olur.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen önermelerin değilini bulunuz.

a) p : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 25$"

b) q : "$\exists x \in \mathbb{R}, 3x^2 - 1 > 2$"

c) r : "$\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 \leq 3$"

Örnek

Aşağıda verilen önermelerin değilini bulalım.

a) $(\forall x \in \mathbb{R}, x < x^2) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}, x - 2 < 0)$

b) $(\forall x \in \mathbb{N}, x + 1 = 5) \vee (\forall x \in \mathbb{N}, x + 5 > 0)$

c) $(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 0) \wedge (\forall x \in \mathbb{Z}, x \leq 0)$

Çözüm

a) $(\exists x \in \mathbb{R}, x \geq x^2) \vee (\forall x \in \mathbb{R}, x - 2 \geq 0)$ olur.

b) $(\exists x \in \mathbb{N}, x + 1 \neq 5) \wedge (\exists x \in \mathbb{N}, x + 5 \leq 0)$ olur.

c) $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 0) \vee (\exists x \in \mathbb{Z}, x > 0)$ olur.

1. Aşağıda verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

p: "Bazı sürüngenler karada yaşar."

q: "Her kare, bir dikdörtgendir.

r: "Bazı doğal sayılar 0 dan küçüktür."

s: "Her tam sayının karesi pozitiftir."

2. Aşağıda verilen önermelerin doğruluk değerlerini karşılarında boş bırakılan yerlere yazınız.

Önerme	Doğruluk Değeri
$\exists x \in \mathbb{N}, 5x - 3 = x + 13$	
$(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0) \vee (\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 = 3)$	
$(\forall x \in \{0, 1\}, x^2 = x) \wedge (\exists x \in \mathbb{N}, x + 2 = -3)$	

3. p(x): "$4x - 1 < 23$" açık önermesini doğru ve yanlış yapan üçer değer bulunuz.

4. p(x): "$x \in \mathbb{N}, x^2 - 5 < 60$" önermesini doğru yapan değerleri bulunuz.

5. Aşağıda verilen önermelerin değillerini bulunuz.

p: "$\exists x \in \mathbb{R}, 2x + 2 = 18$"

q: "$\forall x \in \mathbb{N}, x > 5$"

r: "$(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < x) \wedge (\forall x \in \mathbb{N}, x^2 + 2 > 0)$"

s: "$(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -16) \vee (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \leq 0)$"

Bir bilim dalı ile birlikte özel anlam kazanan sözcüklere o bilim dalının terimleri denir.

Tanımlanmış olan terimlerden yararlanarak tanımlanan terimlere tanımlı terim; tanımlanamayan, sezgi yolu ile kavranabilen terimlere tanımsız terim denir.

Denklem, yamuk ve asal sayı gibi kavramlar matematiksel terimlerdir ve başka matematiksel terimler yardımıyla tanımlanabildiğinden tanımlı terimlerdir.

Küme, eşit ve düzlem gibi terimleri tanımlayamadığımızdan ve sezgilerimizle kavrayabildiğimizden tanımsız terimlerdir.

9.1.1.5. Tanım, Aksiyom, Teorem ve İspat Kavramları

- İki çift sayının farkı çift sayıdır.
- Farklı iki noktadan yalnız bir doğru geçer.
- Doğru ya da yanlış kesin hüküm bildiren ifadelere önerme denir.

» Yukarıdaki ifadelerden hangisi bir tanım belirtir?

» Yukarıdaki ifadelerden hangisinin doğruluğunu ispat etmeye gerek duymadan sezgisel olarak kavrayabilirsiniz?

» Yukarıdaki ifadelerden hangisinin doğruluğunu ispatlayabilirsiniz?

Bilgi Kutusu

Bir terimi eksiksiz olarak açıklayan ifadelere **tanım** denir.

Doğruluğu ispat etmeye gerek duyulmadan kabul edilen önermelere **aksiyom**, doğruluğu ispatlanarak kabul edilen önermelere **teorem** denir.

Teorem $p \Rightarrow q$ şeklindeki önermelerdir. Burada p ye **hipotez**, q ya **hüküm** denir. Bir teoremin hipotezinden hareketle hükmünü elde etmeye **teoremi ispatlamak** denir.

Örnek

Aşağıdaki önermelerden hangilerinin aksiyom olduğunu belirleyelim.

p : "Bir noktadan sonsuz doğru geçer."

q : "İki tek sayının çarpımı tek sayıdır."

r : "Aynı doğru üzerinde olmayan üç nokta bir düzlem belirtir."

s : "Bir ABC üçgeninde iç açılar toplamı 180° dir."

Çözüm

p ve r önermelerinin doğruluğunu sezgisel olarak kavrayabiliriz. Bu nedenle doğruluğunu ispat etmeye gerek duyulmadan kabul edildiği için p ve r önermeleri aksiyomdur.

Örnek

"$5x - 1 = 9$ ise $x = 2$" önermesinin hipotez ve hükmünü belirleyelim.

Çözüm

Verilen önermeyi $p \Rightarrow q$ şeklinde yazarsak p: "$5x - 1 = 9$" ve q: "$x = 2$" olur. p hipotez, q hüküm olduğundan hipotez p: "$5x - 1 = 9$", hüküm q: "$x = 2$" olur.

1. Aşağıdaki noktalı yerlere uygun terimleri yazınız.

a) Doğruluk değerleri aynı olan önermelere .... denir.

b) Bir önermenin hükmünün olumsuzu alınarak oluşturulan önermeye .... denir.

c) p ile q önermelerinin "ise" bağlacı ile bağlanmasıyla oluşan bileşik önermeye .... denir.

2. Aşağıdaki terimlerden tanımlı ve tanımsız terimleri belirleyiniz.

a) Nokta **b)** Işın **c)** Açı

ç) Üçgen **d)** Çember **e)** Doğru

3. Aşağıda verilen önermelerin hipotez ve hükümlerini karşılarında boş bırakılan yerlere yazınız.

Önerme	Hipotez	Hüküm
"$x \neq 3$ ise $x^2 \neq 9$"		
"ABC eşkenar üçgen ise bütün iç açılarının ölçüsü 60° dir"		
"$a \neq 2 \Rightarrow 2a + 7 \neq 11$"		
"$7x - 1 = 13$ ise $x = 2$"		

4. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.

- ( ) "$\forall a \in R$ için $a = a$" önermesi bir aksiyomdur.
- ( ) "n^2 tek doğal sayı ise n tek doğal sayıdır." önermesi bir teoremdir.
- ( ) "$\forall a$, b ve $c \in R$ için $a = b$ ve $b = c$ ise $a = c$ olur." önermesi bir teoremdir.
- ( ) Her teorem bir önermedir.
- ( ) Her önerme bir aksiyomdur.

5. Aksiyom ile teorem arasındaki farkı belirtiniz.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Aşağıdakilerden hangisi bir önermedir?

A) Biraz daha çalışmalıyım.
B) Hoş geldin.
C) Her şey tahmin ettiğim gibi oldu.
D) Birlikte operaya gidelim mi?
E) Gümüşhane, Karadeniz Bölgesi'ndedir.

2. I. 15! sayısı 13 ile kalansız bölünür.
II. Hiçbir asal sayı çift değildir.
III. Bir kenarının uzunluğu 12 cm olan eşkenar üçgenin çevresi 36 cm dir.

Yukarıdaki önermelerden hangileri birbirine denktir?

A) I ve II B) I ve III C) II ve III D) I, II ve III E) Hiçbiri

3. p : "2 asal sayıdır."
q : "İki basamaklı en küçük tam sayı 10 dur."
r : "$\sqrt{3}$ irrasyonel bir sayıdır."

Yukarıdaki önermeler için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $p \equiv 0$ B) $q \equiv 0$ C) $r \equiv 0$ D) $p \equiv q$ E) $q \equiv r$

4. $q \wedge (p \vee p')'$

önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) 1 B) p C) p' D) q E) 0

5. $(p \vee q') \vee (r' \wedge p')' \equiv 0$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $p \equiv 0,\ q \equiv 1,\ r \equiv 0$
B) $p \equiv 1,\ q \equiv 1,\ r \equiv 1$
C) $p \equiv 0,\ q \equiv 0,\ r \equiv 1$
D) $p \equiv 0,\ q \equiv 1,\ r \equiv 1$
E) $p \equiv 1,\ q \equiv 0,\ r \equiv 0$

6. Aşağıdaki önermelerden hangisinin doğruluk değeri sıfırdır?

A) $(0 \Rightarrow 1) \vee 0$
B) $(1 \vee 0) \Rightarrow (0' \Rightarrow 1)$
C) $(1 \wedge 0) \Rightarrow (0 \wedge 0)$
D) $(0 \Rightarrow 1) \Rightarrow (1 \Rightarrow 0)$
E) $(0 \Rightarrow 0) \Rightarrow (1 \wedge 1)$

7. "Kar yağmış ise hava soğuktur." önermesinin karşıt tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) Hava soğuk ise kar yağmıştır.
B) Kar yağmış ise hava soğuk değildir.
C) Hava soğuk değilse kar yağmamıştır.
D) Hava soğuk değilse kar yağmıştır.
E) Kar yağmış ise hava soğuktur.

8. $p \equiv 0$ ve $q \equiv 1$ olduğuna göre

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)'$

önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) 1 B) 0 C) $q \Rightarrow p$ D) $p \wedge q$ E) $p \Leftrightarrow q$

9. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$

B) $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$

C) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

D) $p \Rightarrow q \equiv q \Rightarrow p$

E) $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$

10. $p \Rightarrow (q' \wedge s)$

önermesinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $p' \wedge (q \vee s')$
B) $p' \vee (q \vee s')$
C) $p' \Rightarrow (q \vee s')$
D) $(q \vee s') \Rightarrow q'$
E) $(q \wedge s) \Rightarrow p$

11. $p' \vee (p \Rightarrow q) \equiv 0$

olduğuna göre $p \Leftrightarrow q$ önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) p B) 0 C) 1 D) q' E) $p \vee q$

12. Aşağıdakilerden hangisi

p(x): "$x \in \mathbb{N}, -3 < x < 2$"

açık önermesini doğru yapan değerlerden biridir?

A) –3 B) –2 C) –1 D) 1 E) 2

13. p(x): "$x \in \mathbb{Z}, x^3 < 30$"

açık önermesinin hangi x değeri için doğruluk değeri 0 olur?

A) –4 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

14. Aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

A) Doğru, tanımlı terimdir.

B) "$\sqrt{8}$ irrasyonel bir sayıdır." önermesi bir teoremdir.

C) Altıgen, tanımsız terimdir.

D) "$x \in \mathbb{Z}$ için $x - 3 = 4$ ise $x = 7$" önermesi bir aksiyomdur.

E) "Yöndeş açılar eştir." önermesi bir teoremdir.

15. $(\forall x \in \mathbb{Z}, x^3 < 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{Z}, x - 4 = 0)$

bileşik önermesinin değili aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(\exists x \in \mathbb{Z}, x^3 \geq 0) \vee (\forall x \in \mathbb{Z}, x - 4 \neq 0)$

B) $(\exists x \in \mathbb{Z}, x^3 \geq 0) \wedge (\forall x \in \mathbb{Z}, x - 4 \neq 0)$

C) $(\forall x \in \mathbb{Z}, x^3 \geq 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{Z}, x - 4 \neq 0)$

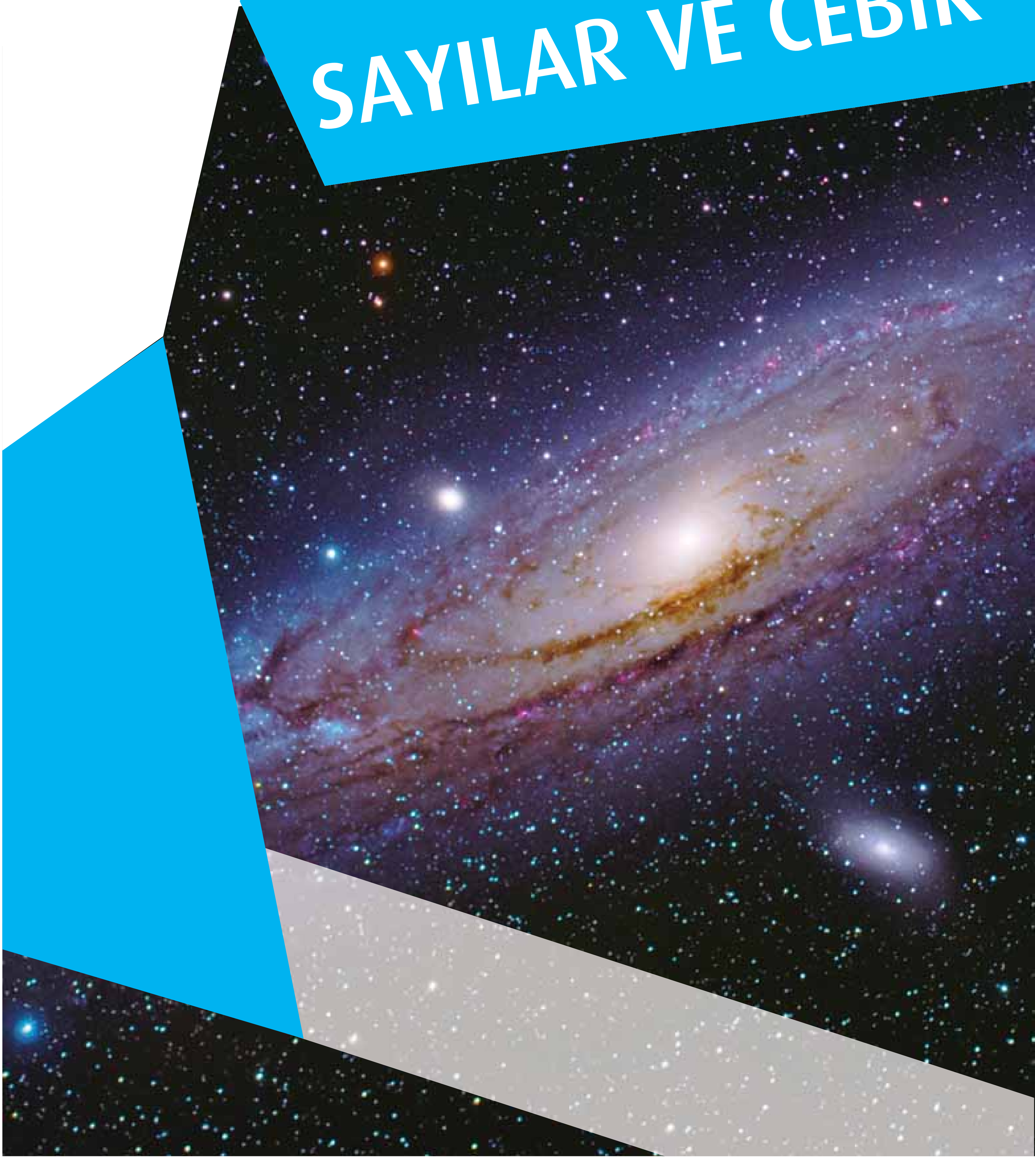
D) $(\exists x \in \mathbb{Z}, x^3 > 0) \wedge (\forall x \in \mathbb{Z}, x - 4 \neq 0)$

E) $(\exists x \in \mathbb{Z}, x^3 > 0) \vee (\forall x \in \mathbb{Z}, x - 4 \neq 0)$

16. n farklı önermenin 1024 farklı doğruluk durumu var ise n kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

SAYILAR VE CEBİR



KÜMELER

Neler Öğreneceğiz?

- Küme kavramı
- Kümenin eleman sayısı
- Evrensel küme
- Boş küme
- Alt küme ve öz alt küme
- Sonlu ve sonsuz kümeler
- Eşit kümeler
- Kümelerde kesişim ve birleşim işlemleri
- Kümelerde fark işlemi
- Bir kümenin tümleyeni
- Ayrık kümeler
- De Morgan kuralları
- Sıralı ikili
- İki kümenin kartezyen çarpımı

Nerelerde Karşımıza Çıkar?

Kümeler bir karmaşıklığın içerisindeki düzen olarak düşünülebilir.

Sınıflandırma, sıralama, ayırma, gruplandırma, bir araya getirme, düzenleme, yerleştirme gibi faaliyetlerin kolayca gerçekleşmesinde nesneleri kümelere ayırmaktan faydalanılır. Kütüphanede kitap düzenlerken, evde eşyaları yerleştirirken, okulda sınıflar oluşturulurken, cisimleri özelliklerine göre sınıflandırırken kümelerden yararlanırız.

Sembol ve Gösterimler

$\in$

$\notin$

$\varnothing$

{ }

s(A)

$\subset$

$\supset$

$\subseteq$

$\supseteq$

$\not\subseteq$

$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

{x | x in sahip olduğu tanımlayıcı özellikler}

9.2.1. KÜMELERDE TEMEL KAVRAMLAR

Yanda hayvansal ve bitkisel besinlerden bazıları verilmiştir.

- En lezzetli olanları bir grup yapınız. Size göre lezzetli olan besinler herkes için lezzetli midir?
- Hayvansal ve bitkisel besinleri ayrı ayrı gruplandırınız.
- Meyveleri bir grup yapmak isteseniz bu gruba alacağınız bir meyve var mı? Bu grup için ne söyleyebilirsiniz?
- Hayvansal ve bitkisel besinlerin hepsini birlikte bir grup yapınız. Bu grup için ne söyleyebilirsiniz?

9.2.1.1. Kümeler ile İlgili Temel Kavramlar

Bazı cümlelerde belirtilen topluluklar herkes tarafından aynı şekilde anlaşılırken, bazılarında belirtilen topluluklar herkes tarafından aynı şekilde anlaşılmayabilir.

- 10 ile 20 arasındaki asal sayılar
- Türkiye'de K harfi ile başlayan bazı iller
- Alfabemizdeki sesli harfler
- Dürüst insanlar

» Yukarıdaki cümlelerde belirtilen topluluklardan hangileri herkes tarafından aynı şekilde anlaşılır?

Bilgi Kutusu

Küme, birbirinden farklı ve iyi tanımlanmış nesnelerden oluşan bir topluluktur. Kümeler A, B, C, ... gibi büyük harflerle gösterilir.

Kümeyi oluşturan nesnelere **kümenin elemanı** denir. a elemanı A kümesine ait ise a $\in$ A biçiminde yazılır ve "a elemanıdır A" diye okunur. a elemanı A kümesine ait değilse a $\notin$ A biçiminde yazılır ve "a elemanı değildir A" diye okunur.

A kümesinin eleman sayısı s(A) ile gösterilir.

Örnek

Aşağıdaki toplulukların küme olup olmadığını belirleyelim. Küme olanların elemanlarını yazalım ve eleman sayılarını bulalım.

a) 2 ile 10 arasındaki tek sayılar

b) Çift asal sayılar

c) 3 ile 13 arasındaki bazı asal sayılar

Çözüm

a ve b maddelerindeki topluluklar açık ve kesin olarak belirtildiği için herkes tarafından aynı şekilde anlaşılır. Bu nedenle bu topluluklar birer küme belirtir. a maddesindeki kümenin elemanları 3, 5, 7, 9 dur. Bu kümeyi A ile gösterirsek s(A) = 4 olur. b maddesindeki kümenin elemanı 2 dir. Bu kümeyi B ile gösterirsek s(B) = 1 olur.

c maddesindeki ifade herkes tarafından aynı şekilde anlaşılmayacağından küme belirtmez.

Sıra Sizde

Aşağıdaki toplulukların hangileri küme belirtir? Küme belirtenlerin elemanlarını yazınız, eleman sayılarını bulunuz.

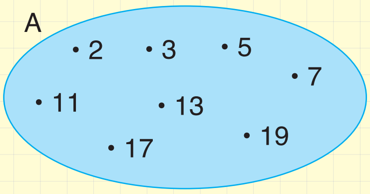
a) Karesi 20 den küçük olan tam sayılar

b) 4 ün katı olan iki basamaklı sayıların bazıları

c) 2 katının 4 fazlası 16 olan sayı

Kümelerin Farklı Gösterimleri

A = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}



A = {x | 2 ≤ x < 20, x asal sayı}

» Yukarıdaki farklı gösterimlerin hepsi aynı kümeyi belirtir mi?

John Venn
(Con Ven)

(1834-1923)

Venn şeması gösterimini matematiğe kazandıran John Venn'dir.

Venn şeması olasılık, mantık, istatistik, bilgisayar bilimleri ve kümeler kuramı gibi birçok alanda aktif olarak kullanılmaktadır.

Resimdeki mozaik cam, Cambridge Üniversitesinde ders vermiş olan John Venn'in anısına üniversitedeki fakültelerden birinde bulunmaktadır.

Bilgi Kutusu

- Kümenin elemanlarının aralarına virgül konularak { } biçiminde parantezin içine yazılmasına **liste yöntemi ile gösterme** denir.
- Kümenin elemanlarının kapalı bir eğri içine, önlerine nokta konularak yazılmasına **Venn şeması ile gösterme** denir.
- Kümeyi oluşturan elemanların ortak bir özelliği varsa kümenin elemanlarının bu özellik kullanılarak yazılmasına **ortak özellik yöntemi ile gösterme** denir. A = {x | ...} veya A = {x : ... } şeklindeki yazılımda noktalı yerlere elemanların ortak özelliği yazılır. Küme parantezi içindeki " | " ve " : " işaretleri "öyle ki" diye okunur.

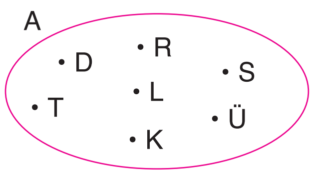
Örnek

"DÜRÜSTLÜK" kelimesinin harflerinin oluşturduğu A kümesini liste yöntemi ile yazalım ve Venn şeması ile gösterelim.

Çözüm

"DÜRÜSTLÜK" kelimesindeki harflerin oluşturduğu kümeyi
A = {D, R, S, T, L, Ü, K} şeklinde yazabiliriz.

Bu kümeyi Venn şeması ile yandaki gibi gösterebiliriz.



! Kümede her eleman yalnız bir kez yazılır.

Örnek

A = {–2, –1, 0, 1, 2} kümesini ortak özellik yöntemi ile gösterelim.

! Kümedeki elemanların yer değiştirmesi kümeyi değiştirmez.

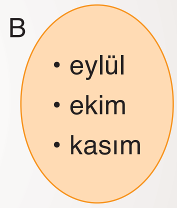
Çözüm

A kümesindeki elemanların ortak özelliklerinden biri –2 ile 2 arasında (–2 ve 2 dahil) olan tam sayılar olmasıdır. Bu özelliği kullanarak

A = $\{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{Z}\}$ yazabiliriz.

Sıra Sizde

Venn şeması ile gösterilen B kümesini liste yöntemi ve ortak özellik yöntemi ile yazınız.



Sonlu ve Sonsuz Kümeler

$A = \{x \mid x \leq 6,\ x \in \mathbb{N}\}$

$B = \{x \mid x < 3,\ x \in \mathbb{Z}\}$

» A ve B kümelerinin eleman sayıları için ne söyleyebilirsiniz?

Bilgi Kutusu

- Eleman sayısı bir doğal sayı ile ifade edilebilen kümelere **sonlu küme** denir.
- Eleman sayısı bir doğal sayı ile ifade edilemeyen kümelere **sonsuz küme** denir.

Örnek

Aşağıdaki kümelerin sonlu küme ya da sonsuz küme olup olmadıklarını bulalım.

a) $A = \{x \mid x^2 < 9,\ x \in \mathbb{Z}\}$

b) $B = \{x \mid 3 < x < 6,\ x \in \mathbb{R}\}$

Çözüm

a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ve $s(A) = 5$ olup A kümesi sonlu kümedir.

b) B kümesinin elemanları 3 ile 6 arasındaki gerçek sayılardan oluşmaktadır. Bu aralıkta sayılamayacak kadar çok gerçek sayı vardır. Bu nedenle B kümesinin eleman sayısını belirleyemeyiz. O hâlde B kümesi sonsuz kümedir.

! Birbirinden farklı iki rasyonel sayı arasında başka bir rasyonel sayı bulunabilir.

Boş Küme

$A = \{x \mid x$, haftanın K harfi ile başlayan günleri$\}$

$B = \{x \mid -1 < x < 0,\ x \in \mathbb{N}\}$

» A ve B kümelerinin eleman sayıları için ne söyleyebilirsiniz?

Bilgi Kutusu

Elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir. Boş küme { } veya ∅ sembolleri ile gösterilir.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

(Corç Ferdinant Ludvik Filip Kantor)

(1845-1918)

Cantor, sayılar kuramı ile ilgilenmiş, matematiğe yeni bir ufuk açtığı kabul edilen kümeler kuramını kurmuştur.

Kümeler arasında bire bir eşlemenin önemini ortaya koymuş, sonsuz küme kavramına matematiksel bir tanım getirmiştir. Gerçek sayıların sonsuz ve sayılamaz bir küme olduğunu göstermiştir.

Cantor'un bire bir eşleme, kardinal sayılar, sayılabilme, Cantor problemleri ile Cantor paradoksu önde gelen çalışmalarıdır.

Örnek

Aşağıda verilen kümelerin boş küme olup olmadığını bulalım.

a) $A = \{x \mid 2x + 3 = 6, x \in \mathbb{N}\}$

b) B = {x | Türkiye'nin P harfi ile başlayan illeri}

Çözüm

a) $2x + 3 = 6$ ise $x = \frac{3}{2}$ dir. $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$ olduğundan $s(A) = 0$ olur.
O hâlde A kümesi boş kümedir.

b) Türkiye'de "P" harfi ile başlayan il olmadığından $s(B) = 0$ olur.
O hâlde B kümesi boş kümedir.

Sıra Sizde

$A = \{-3 < x < -1, x \in \mathbb{N}\}$ kümesi boş küme midir?

Evrensel Küme

Betül yüksek lisans tezi için üniversite öğrencileri üzerinde bir araştırma yapacaktır.

» En geniş araştırma grubu için ne söyleyebilirsiniz?

Bilgi Kutusu

Üzerinde işlem yapılan kümelere ait elemanları içinde bulunduran kümeye **evrensel küme** denir. Evrensel küme E ile gösterilir.

Örnek

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ve $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ kümeleri için bir evrensel küme yazalım.

Çözüm

A ve B kümelerini içinde bulunduran $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümesini yazabiliriz.

Sıra Sizde

"YARDIMSEVER" kelimesinin sesli harflerinin oluşturduğu küme için bir evrensel küme belirleyiniz.

1. Aşağıdaki ifadelerden hangileri küme belirtir?

a) Ankara ilinin ilçeleri

b) En sevilen meyveler

c) Türkiye'ye komşu olan ülkeler

ç) Uçabilen köpekler

d) S harfi ile başlayan aylar

e) Sınıfın çalışkan öğrencileri

2. Aşağıdaki kümelerin eleman sayılarını bulunuz.

a) $A = \{1, \{2\}, \{1\}, \{1, 2\}, 3, 4, \{3, 4, 5\}\}$

b) $B = \{\varnothing\}$

c) $C = \{\ \}$

ç) $D = \{x \mid -2 \leq x \leq 6,\ x \in \mathbb{N}\}$

3. $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ kümesini aşağıda belirtilen yöntemlerle gösteriniz.

a) Ortak özellik yöntemi

b) Venn şeması yöntemi

4. $A = \{a, \{a, b\}, b, \{b\}, \{1, 2\}, 2\}$ kümesi için aşağıda verilen ifadeleri inceleyiniz. Yanlarındaki kutucuklara doğru olanlar için "D", yanlış olanlar için "Y" yazınız.

☐ $a \in A$	☐ $\{a, b\} \in A$	☐ $b \in A$
☐ $\{a\} \in A$	☐ $1 \in A$	☐ $\{\{b\}\} \in A$

5. Aşağıdaki kümelerden hangileri boş kümedir?

a) $A = \{x \mid x,$ 13 ün bölenleri$\}$

b) $B = \{x \mid x^2 < 0,\ x \in \mathbb{R}\}$

c) $C = \{x \mid -1 < x \leq 0,\ x \in \mathbb{N}\}$

ç) $D = \{x \mid x,$ 2 den büyük çift asal sayılar$\}$

6. Aşağıdaki kümelerden hangileri sonlu kümedir?

a) $A = \{x \mid x > 14,\ x \in \mathbb{Z}\}$

b) $B = \{x \mid x \leq -1,\ x \in \mathbb{N}\}$

c) $C = \{x \mid x = 3k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

ç) $D = \{x \mid 0 < x < 4,\ x \in \mathbb{N}\}$

d) $E = \{x \mid -2 \leq x \leq 12,\ x \in \mathbb{R}\}$

9.2.1.2. Alt Küme

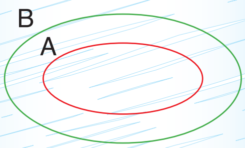
Enerji Veren Besinler

Karbonhidratlar	Yağlar	Proteinler
• Ekmek	• Fındık	• Et
• Buğday	• Ceviz	• Süt
• Makarna	• Ayçiçeği	• Yumurta
• Patates	• Zeytin	• Balık

Yukarıda enerji veren besinlerin sınıflandırılması yapılmıştır. Bu üç sınıfın her biri bir küme oluşturmaktadır.

» Karbonhidratlara, yağlara, proteinlere örnek olarak verilen besinlerin her biri aynı zamanda enerji veren bir besin midir?

!



$A \subseteq B$

$B \supseteq A$

Bilgi Kutusu

A ve B herhangi iki küme olsun. A kümesinin her elemanı B kümesinin de elemanı ise **A kümesine B kümesinin alt kümesidir** denir ve $A \subseteq B$ veya $A \subset B$ ile gösterilir. Aynı durum için **B kümesi A kümesini kapsar** da denir ve $B \supseteq A$ veya $B \supset A$ ile gösterilir. A kümesinin en az bir elemanı, B kümesinin elemanı değilse **A kümesi B kümesinin alt kümesi değildir** denir ve $A \not\subseteq B$ ile gösterilir.

! $A \subset B \Leftrightarrow [a \in A \Rightarrow a \in B]$ dir.

Örnek

$A = \{x \mid 2 \leq x \leq 10,\ x = 2n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ ve $B = \{x \mid 1 \leq x \leq 10,\ x \in \mathbb{N}\}$ kümelerini karşılaştıralım.

Çözüm

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ olup A kümesinin her elemanı B kümesinin de elemanıdır. Bu nedenle $A \subseteq B$ dir.

Sıra Sizde

Türkiye Süper Ligi'nde oynayan futbolcuların kümesi ile Türkiye Süper Ligi'nde oynayan yabancı futbolcuların kümesi arasında nasıl bir ilişki vardır?

Örnek

Güneydoğu Anadolu Bölgemizde bulunan illerimizin kümesini A, Suriye ile sınırı olan illerimizin kümesini B ile gösterelim. $B \subseteq A$ olup olmadığını belirleyelim.

Çözüm

A = {Kilis, Gaziantep, Adıyaman, Diyarbakır, Şanlıurfa, Batman, Siirt, Mardin, Şırnak},

B = {Hatay, Gaziantep, Kilis, Şanlıurfa, Mardin, Şırnak}

şeklindedir.

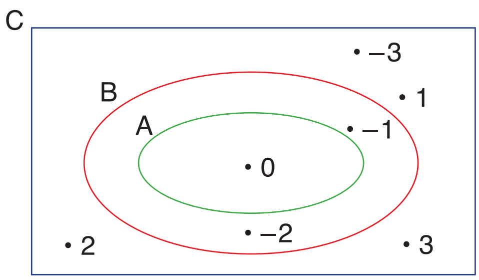
B kümesinin elemanı olan Gaziantep, Kilis, Şanlıurfa, Mardin, Şırnak A kümesinin de elemanıdır. Fakat B kümesinin elemanı olan Hatay, A kümesinin elemanı değildir. Bu nedenle $B \not\subseteq A$ dır.

Örnek

$A = \{x \mid -2 < x \leq 0, x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid -2 \leq x < 1, x \in \mathbb{Z}\}$ ve $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ kümeleri veriliyor.

A, B ve C kümelerini Venn şeması ile gösterelim. Bu kümeler arasındaki ilişkiyi açıklayalım.

Çözüm



$A = \{0\}$, $B = \{-2, -1, 0\}$ ve $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ olup A, B ve C kümelerinin Venn şeması ile gösterimi yukarıdaki gibidir.

Şemadan da görüldüğü gibi $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ iken $A \subseteq C$ dir.

Bilgi Kutusu

A, B ve C herhangi bir küme olmak üzere,

- Boş küme her kümenin alt kümesidir. $\varnothing \subseteq A$ dır.
- Her küme kendisinin alt kümesidir. $A \subseteq A$ dır.
- Her küme evrensel kümenin alt kümesidir. $A \subseteq E$ dir.
- $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$ dir.

Ernst Zermelo
(Ernst Zermelo)
(1871-1953)

Kümeler kuramına katkıları ile tanınan Alman matematikçidir. Zermelo aksiyomu ile kümeler kuramında tartışma başlatmıştır. Bu aksiyoma göre bir kümenin her alt kümesinde tek ve belli bir şekilde üstünlüğü bulunan bir öge seçilebilir, yani her küme iyi sıralanabilir. İyi sıralama kavramı 20. yüzyılın başlarında çok tartışılmış ve bugün herkes tarafından kabul edilmiştir.

Bilgi Kutusu

Bir A kümesinin kendinden başka alt kümelerine bu kümenin **öz alt kümeleri** denir.

Örnek

A = { } , B = {a} , C = {a, b} ve D = {a, b, c} kümelerinin alt kümelerini yazalım. Kümelerin eleman sayıları ile alt kümelerinin sayılarını karşılaştıralım.

Çözüm

A = { } nin alt kümesi { } dir.
B = {a} nın alt kümeleri { }, {a} dır.
C = {a, b} nin alt kümeleri { }, {a}, {b}, {a, b} dir.
D = {a, b, c} nin alt kümeleri { }, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c} dir.
s(A) = 0 iken alt küme sayısı $1 = 2^0$,
s(B) = 1 iken alt küme sayısı $2 = 2^1$,
s(C) = 2 iken alt küme sayısı $4 = 2^2$,
s(D) = 3 iken alt küme sayısı $8 = 2^3$ olduğu görülmektedir.

Bilgi Kutusu

n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n, öz alt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ ile hesaplanır.

Örnek

$A = \{x \mid -3 \leq x < 3,\ x \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin alt kümelerinin sayısını bulalım.

Çözüm

A = {–3, –2, –1, 0, 1, 2} olur. s (A) = 6 olduğundan A kümesinin alt kümelerinin sayısı $2^6 = 64$ bulunur.

Örnek

Öz alt kümelerinin sayısı 255 olan kümenin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

Kümenin eleman sayısı n olsun. Öz alt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ dir.
$2^n - 1 = 255 \Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$ bulunur.

Örnek

A = {p, r, s, t} kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde

a) p elemanının bulunmadığını

b) p elemanının bulunduğunu

c) r ve s elemanlarının bulunduğunu

ç) s veya t elemanlarının bulunduğunu

hesaplayalım.

Çözüm

a) A kümesinden p elemanını çıkararak oluşturacağımız kümenin alt kümelerinde p bulunmaz. O hâlde p elemanının bulunmadığı alt küme sayısı $2^3 = 8$ olur.

b) A kümesinin bütün alt kümelerinin sayısından p elemanı bulunmayan alt kümelerin sayısını çıkarırsak p elemanının bulunduğu alt küme sayısını buluruz. O hâlde p elemanının bulunduğu alt küme sayısı $2^4 - 2^3 = 16 - 8 = 8$ olur.

c) A kümesinden r ve s elemanlarını çıkararak oluşturacağımız kümenin $2^2 = 4$ tane alt kümesi vardır. Bu kümelerin her birine r ve s yi eleman olarak eklersek 4 tane kümede r ve s elemanları bulunur.

ç) A kümesinin tüm alt kümelerinin sayısından s ve t elemanlarının bulunmadığı alt küme sayısını çıkarırsak s veya t elemanlarının bulunduğu alt küme sayısını buluruz.

s ve t elemanlarının bulunmadığı alt küme sayısı $2^2 = 4$ olup s veya t elemanlarının bulunduğu alt küme sayısı $2^4 - 4 = 16 - 4 = 12$ olur.

Sıra Sizde

A = {p, r, s, t} kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde p ve s elemanları bulunur, r elemanı bulunmaz?

Örnek

A = {7, 8, 9} ve B = {6, 7, 8, 9, 10} olduğuna göre $A \subseteq K \subseteq B$ şartını sağlayan K kümelerinin sayısını bulalım.

Çözüm

B kümesinin A kümesinde olmayan elemanlarının kümesi {6, 10} dur. Bu kümenin alt kümeleri { }, {6}, {10}, {6, 10} dur. Bu kümelerin her birine A kümesinin elemanlarının eklenmesiyle K kümesi oluşturulabilir. Bu nedenle $A \subseteq K \subseteq B$ şartını sağlayan 4 tane K kümesi vardır.

1. Ülkemizdeki illerin kümesi A, Akdeniz Bölgesi'ndeki illerin kümesi B, Akdeniz'e kıyısı olan illerin kümesi C olsun.

a) $C \subseteq B$ midir? **b)** $B \subseteq A$ mıdır?

2. $A = \{x \mid -5 \leq x \leq -3, x \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin kaç tane alt kümesi vardır?

3. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e, f\}$ kümelerinin her ikisinin de alt kümesi olan kümeleri yazınız.

4. Alt kümelerinden bazıları {1}, {1, 2}, {2, 3, 4} olan kümenin en az kaç alt kümesi vardır?

5. Öz alt küme sayısı 511 olan küme kaç elemanlıdır?

6. $A = \{x, y, \{y\}, \{x, z\}, z\}$ kümesi için aşağıda verilenleri inceleyiniz. Doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.

☐ $x \not\subseteq A$	☐ $\{\{y\}\} \subseteq A$	☐ $\{z\} \subseteq A$
☐ $\{y\} \subseteq A$	☐ $\{x, z\} \subseteq A$	☐ $\{\{x, z\}\} \not\subseteq A$
☐ $y \subseteq A$	☐ $\{z\} \subseteq A$	☐ $z \not\subseteq A$

7. $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümeleri veriliyor.
$A \neq D$, $B \neq D$ ve $A \subseteq D \subseteq B$ şartlarını sağlayan kaç farklı D kümesi vardır?

8. Bir kümenin eleman sayısı 2 artırılırsa alt küme sayısı kaç katına çıkar?

9. A kümesinin eleman sayısı ile B kümesinin eleman sayısının toplamı 10 dur. B kümesinin alt küme sayısı 256 olduğuna göre s(A) kaçtır?

10. $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde

a) a ve b elemanları bulunur?

b) a elemanı bulunur, d elemanı bulunmaz?

c) c ya da e elemanı bulunur?

9.2.1.3. İki Kümenin Eşitliği

$A = \{x \mid 0 < x^2 < 10,\ x \in \mathbb{N}\}$

$B = \{x \mid 1 \leq x < 4,\ x \in \mathbb{N}\}$

» A ve B kümelerinin elemanlarını karşılaştırınız.

Bilgi Kutusu

$A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise yani A ve B aynı elemanlardan oluşuyorsa bu kümelere **eşit kümeler** denir ve $A = B$ ile gösterilir. A ve B eşit kümeler değilse $A \neq B$ ile gösterilir.

! $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ dır.

Örnek

$A = \{x \mid 36 \leq x^2 \leq 64,\ x \in \mathbb{Z}\}$ ve $B = \{x \mid 5 < x < 9,\ x \in \mathbb{N}\}$ kümeleri veriliyor. $A = B$ midir? Bulalım.

Çözüm

A ve B kümelerini liste biçiminde yazarsak $A = \{6, 7, 8\}$ ve $B = \{6 ,7, 8\}$ dir. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olduğundan $A = B$ olur.

Sıra Sizde

$A = \{x \mid 1 < x < 10,\ x = 3k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ ve

$B = \{x \mid 1 \leq x^2 < 10,\ x \in \mathbb{N}\}$

kümeleri eşit kümeler midir?

! Eleman sayıları aynı olan kümeler eşit kümeler olmayabilir.

Örnek

A kümesinin eleman sayısı $2a - 4$, B kümesinin eleman sayısı $a + 3$ tür. A ile B eşit kümeler olduğuna göre s(A) nı bulalım.

Çözüm

$A = B \Rightarrow s(A) = s(B) \Rightarrow 2a - 4 = a + 3 \Rightarrow a = 7$ olur.

$s(A) = 2a - 4 = 2 \cdot 7 - 4 = 10$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.

- ( ) s(A) = s(B) ise A = B olur.
- ( ) Eşit kümelerin alt küme sayıları eşittir.
- ( ) A = B ise $A \subseteq B$ dir.
- ( ) $B \not\subseteq A$ ise $A \neq B$ dir.

2. Aşağıdaki kümelerden birbirine eşit olanları belirleyiniz.

a) $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3,\ x \in \mathbb{N}\}$

b) $B = \{x \mid 0 < x^2 < 36,\ x \in \mathbb{N}\}$

c) $C = \{x \mid -3 < x < 1,\ x \in \mathbb{Z}\}$

ç) $D = \{x \mid x < 6,\ x \in \mathbb{Z}^+\}$

d) $E = \{x \mid 0 < x^2 \leq 9,\ x \in \mathbb{N}\}$

3. A kümesinin alt küme sayısı a + 5, B kümesinin alt küme sayısı 3a – 17 dir.
A = B olduğuna göre s(A) kaçtır?

4. $A = \{0, 1, 2, 3\}$
$B = \{x \mid x \leq 4,\ x \in \mathbb{N}\}$
$C = \{x \mid -5 < x < 5,\ x \in \mathbb{N}\}$
$D = \{x \mid x^2 < 16,\ x \in \mathbb{N}\}$
kümeleri ile ilgili aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

a) A = B **b)** C = D
c) A = D **ç)** A = C
d) B = C **e)** B = D

5. Alt küme sayısı 128 olan bir kümeye eşit olan bir kümenin eleman sayısı kaçtır?

9.2.2. KÜMELERDE İŞLEMLER

Aşağıda bazı tarım ürünlerinin üretiminin en fazla olduğu bölgeler verilmiştir.

Bölgeler	Buğday	Arpa	Mısır	Pirinç	Yulaf	Nohut	Mercimek
	Tarım ürünleri						
Akdeniz Bölgesi			✗	✗	✗	✗	
Doğu Anadolu Bölgesi		✗					
Ege Bölgesi						✗	
Güneydoğu Anadolu Bölgesi							✗
İç Anadolu Bölgesi	✗	✗			✗	✗	✗
Karadeniz Bölgesi			✗	✗			
Marmara Bölgesi				✗	✗		

- Bütün bölgelerde üretilen bir ürün var mıdır?
- Yalnızca bir bölgede üretilen ürün hangisidir?
- Akdeniz Bölgesi ve İç Anadolu Bölgesi'nde üretilen ürünleri söyleyiniz.
- Güneydoğu Anadolu Bölgesi'nde üretilmeyen ürünleri söyleyiniz.

Sembol ve Gösterimler

$\cup$

$\cap$

$A - B$ (veya $A \setminus B$)

A'

$A \times B$

$s(A \times B)$

9.2.2.1. Kümelerde Birleşim, Kesişim, Fark ve Tümleme İşlemleri

Kümelerde Birleşim ve Kesişim İşlemleri

Bir okulda iki kompozisyon yarışması düzenlenmektedir. Bu kompoziyon yarışmalarından birinin konusu sabrın önemi, diğerinin konusu ise adaletin önemidir.

Kompozisyon yarışmalarına katılacak olan öğrencilerin adları yandaki listede verilmiştir.

Sabrın Önemi	Adaletin Önemi
Gülay	Eren
Ahmet	Sevgi
Emre	İrem
Zehra	Ahmet
	Emre

» Her iki konuda da yazdıkları kompozisyon ile yarışmaya katılacak olan öğrenciler kimlerdir?

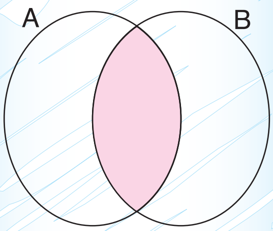
» En az bir konuda yazdığı kompozisyonla yarışmaya katılacak olan öğrenciler kimlerdir?

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$

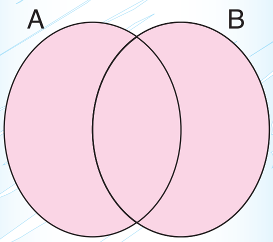
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$

Bilgi Kutusu

- A ve B herhangi iki küme olmak üzere A ve B kümelerinin bütün elemanlarından oluşan kümeye bu iki kümenin **birleşim kümesi** denir ve $A \cup B$ şeklinde gösterilir.
- A ve B kümelerinin ortak elemanlarından oluşan kümeye bu iki kümenin **kesişim kümesi** denir ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir.



$A \cap B$



$A \cup B$

Örnek

• Penguen	• Köpek	• Timsah
• Balık	• Kedi	• Koyun

a) Yukarıdaki hayvanlardan karada yaşayanların kümesine K, suda yaşayanların kümesine S diyelim. K ve S kümelerini liste biçiminde yazalım.

b) $K \cap S$ ve $K \cup S$ kümelerini yazalım.

Çözüm

a) K = {köpek, kedi, timsah, penguen, koyun} ve
S = {penguen, balık, timsah} şeklindedir.

b) $K \cap S$ = {timsah, penguen} ve
$K \cup S$ = {köpek, kedi, timsah, penguen, koyun, balık} olur.

Örnek

$A = \{x \mid -1 \le x < 3,\ x \in \mathbb{Z}\}$ ve $B = \{x \mid -3 < x < 1,\ x \in \mathbb{Z}\}$ kümeleri veriliyor.

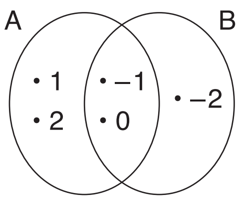
$A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerini aşağıda belirtilen yöntemlerle gösterelim.

a) Venn şeması yöntemi **b)** Ortak özellik yöntemi

Çözüm

a) $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ve $B = \{-2, -1, 0\}$ olup
$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ve $A \cap B = \{-1, 0\}$ şeklindedir.

Bu kümelerin Venn şeması ile gösterimi aşağıdaki gibidir.



b) $A \cup B = \{x \mid -2 \le x \le 2,\ x \in \mathbb{Z}\}$ ve $A \cap B = \{x \mid -2 < x < 1,\ x \in \mathbb{Z}\}$ şeklinde yazabiliriz.

$A \cup E = E$

$A \cap E = A$

Sıra Sizde

$A = \{x \mid 2 < x < 10,\ x \text{ asal sayı}\}$ ve $B = \{x \mid -1 \leq x \leq 3,\ x \in \mathbb{N}\}$ kümeleri veriliyor.

$A \cap B$ ve $A \cup B$ kümelerini liste yöntemi ile yazınız.

Örnek

$A = \{a, b, c, d\}$ ve $B = \{k, l, m, n\}$ kümeleri veriliyor.

$A \cap B$ kümesini liste yöntemi ile yazalım.

Çözüm

A ve B kümelerinin ortak elemanı olmadığı için $A \cap B = \{\ \}$ olur.

Bilgi Kutusu

$A \cap B = \varnothing$ ise A ve B kümelerine **ayrık kümeler** denir.

Örnek

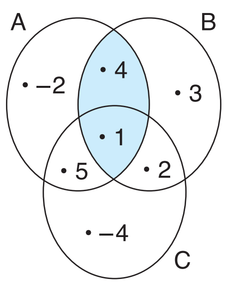
$A = \{-2, 1, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $C = \{-4, 1, 2, 5\}$ kümeleri veriliyor.

$A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ ve $A \cap B \cap C$ kümelerini Venn şeması ile gösterelim.

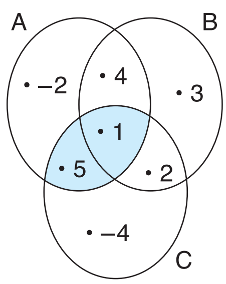
Çözüm

$A \cap B = \{1, 4\}$, $A \cap C = \{1, 5\}$, $B \cap C = \{1, 2\}$ ve $A \cap B \cap C = \{1\}$ dir.

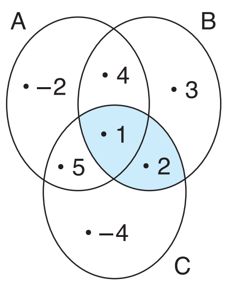
Bu kümelerin Venn şeması ile gösterimi aşağıdaki gibidir.



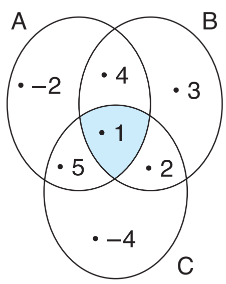
A ∩ B



A ∩ C



B ∩ C



A ∩ B ∩ C

Bernhard Bolzano
(Bernart Bolzano)
(1781-1848)

İtalyan asıllı bir Çek düşünürüdür. Aynı zamanda iyi bir mantıkçı ve matematikçidir. Temel çalışmaları sonsuzlar paradoksu üzerinedir. Sonsuz kümeler üzerinde çalışmıştır. Gerçek fonksiyonlar kuramına katkıları olmuş, modern mantığın öncülerinden olmuştur. Analizde, geometride, mantıkta, felsefede çok sayıda eseri vardır.

Sıra Sizde

$A = \{-2, 1, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $C = \{-4, 1, 2, 5\}$ kümeleri için $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cup C$, $A \cup B \cup C$ kümelerini Venn şeması ile gösteriniz.

Örnek

Her A kümesi için aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $A \cup A = A$ **b)** $A \cap A = A$

Çözüm

a) $A \cup A = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in A\} = \{x \mid x \in A\} = A$ olur.

b) $A \cap A = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in A\} = \{x \mid x \in A\} = A$ olur.

Sıra Sizde

$A = \{a, b, c\}$ kümesi veriliyor.

$A \cap A$ ve $A \cup A$ kümelerini yazınız.

Bilgi Kutusu

Her A kümesi için $A \cup A = A$ ve $A \cap A = A$ dır. Bu özelliğe **tek kuvvet özelliği** denir.

Örnek

A, B ve C kümeleri için aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $A \cup B = B \cup A$ **b)** $A \cap B = B \cap A$

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ **ç)** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Çözüm

a) $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ veya } x \in A\} = B \cup A$ olur.

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ ve } x \in A\} = B \cap A$ olur.

c) $(A \cup B) \cup C = \{x \mid x \in (A \cup B) \text{ veya } x \in C\}$
$= \{x \mid (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ veya } x \in C\}$
$= \{x \mid x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ veya } x \in C)\}$
$= \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in (B \cup C)\} = A \cup (B \cup C)$ olur.

ç) $(A \cap B) \cap C = \{x \mid x \in (A \cap B) \text{ ve } x \in C\}$
$= \{x \mid (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ ve } x \in C\}$
$= \{x \mid x \in A \text{ ve } (x \in B \text{ ve } x \in C)\}$
$= \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in (B \cap C)\} = A \cap (B \cap C)$ olur.

Bilgi Kutusu

- Kümelerde birleşim ve kesişim işlemlerinin **değişme özelliği** vardır. Yani A ve B kümeleri için $A \cup B = B \cup A$ ve $A \cap B = B \cap A$ tir.
- Kümelerde birleşim ve kesişim işlemlerinin **birleşme özelliği** vardır. Yani A, B ve C kümeleri için $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ve $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ tir.

Örnek

Her A kümesi için aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $A \cup \varnothing = A$ **b)** $A \cap \varnothing = \varnothing$

Çözüm

a) $A \cup \varnothing = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in \varnothing\} = \{x \mid x \in A\} = A$ olur.

b) $A \cap \varnothing = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in \varnothing\} = \{x \mid x \in \varnothing\} = \varnothing$ olur.

! $p \vee 0 \equiv p$
$p \wedge 0 \equiv 0$

Bilgi Kutusu

- Bir küme ile boş kümenin birleşimi kümenin kendisini verdiği için birleşim işleminin **birim (etkisiz) elemanı** $\varnothing$ dir. $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$ tir.
- Bir küme ile boş kümenin kesişimi $\varnothing$ olduğu için kesişim işleminin **yutan elemanı** $\varnothing$ dir. $A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$ tir.

Örnek

A ve B kümeleri için $A \subseteq B$ ise aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $A \cup B = B$ **b)** $A \cap B = A$

Çözüm

a) $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ veya } x \in B\}$
$= \{x \mid x \in B\} = B$ olur.

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\} = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in A\}$
$= \{x \mid x \in A\} = A$ olur.

! $A \subseteq B$ iken
$x \in A \Rightarrow x \in B$ dir.

Bilgi Kutusu

A ve B kümeleri için $A \subseteq B$ ise $A \cup B = B$ ve $A \cap B = A$ tir.

Örnek

A, B ve C kümeleri için aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ç) $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$

Çözüm

a) $A \cup (B \cap C) = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in (B \cap C)\}$

$= \{x \mid x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ ve } x \in C)\}$

$= \{x \mid (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ ve } (x \in A \text{ veya } x \in C)\}$

$= \{x \mid x \in (A \cup B) \text{ ve } x \in (A \cup C)\}$

$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$ olur.

b) $(B \cap C) \cup A = \{x \mid x \in (B \cap C) \text{ veya } x \in A\}$

$= \{x \mid (x \in B \text{ ve } x \in C) \text{ veya } x \in A\}$

$= \{x \mid (x \in B \text{ veya } x \in A) \text{ ve } (x \in C \text{ veya } x \in A)\}$

$= \{x \mid x \in (B \cup A) \text{ ve } x \in (C \cup A)\}$

$= (B \cup A) \cap (C \cup A)$ olur.

c) $A \cap (B \cup C) = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in (B \cup C)\}$

$= \{x \mid x \in A \text{ ve } (x \in B \text{ veya } x \in C)\}$

$= \{x \mid (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } x \in C)\}$

$= \{x \mid x \in (A \cap B) \text{ veya } x \in (A \cap C)\}$

$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$ olur.

ç) $(B \cup C) \cap A = \{x \mid x \in (B \cup C) \text{ ve } x \in A\}$

$= \{x \mid (x \in B \text{ veya } x \in C\} \text{ ve } x \in A)\}$

$= \{x \mid (x \in B \text{ ve } x \in A) \text{ veya } (x \in C \text{ ve } x \in A)\}$

$= \{x \mid x \in (B \cap A) \text{ veya } x \in (C \cap A)\}$

$= (B \cap A) \cup (C \cap A)$ olur.

Bilgi Kutusu

- Birleşim işleminin kesişim işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır. Yani
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ve
  $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$ tir.
- Kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır. Yani
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ve
  $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ tir.

Örnek

$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $A \cap C = \{2, 4, 5, 7\}$ olduğuna göre $A \cap (B \cup C)$ kümesini bulalım.

Çözüm

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 5, 7\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ olur.

Örnek

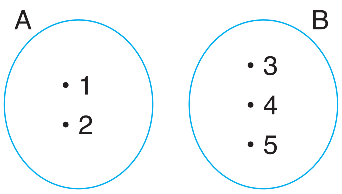
Aşağıda verilen kümeleri Venn şeması yöntemi ile göstererek $s(A \cup B)$ nı bulalım.

a) $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

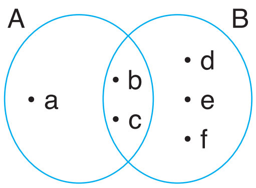
b) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e, f\}$

c) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$

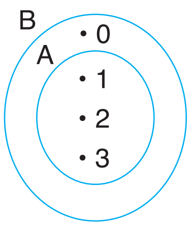
Çözüm

a) 

$s(A \cup B) = 5$ olur.

b) 

$s(A \cup B) = 6$ olur.

c) 

$s(A \cup B) = 4$ olur.

Bilgi Kutusu

A ve B herhangi iki küme olmak üzere

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ tir.

$A \cap B = \varnothing$ iken $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ tir.

$A \subseteq B$ iken $s(A \cup B) = s(B)$ tir.

TOPLANTI

Bir toplantıda çay, süt ve kahve ikram edilmektedir. Toplantıya katılanlardan

1) Yedisi çay içmez.
2) Altısı süt içmez.
3) Beşi kahve içmez.
4) Dördü ne çay ne de süt içer.
5) Üçü ne çay ne de kahve içer.
6) İkisi ne süt ne de kahve içer.
7) Biri ne çay ne süt ve ne de kahve içer.
8) Hiçbiri üçünü birden içmez.

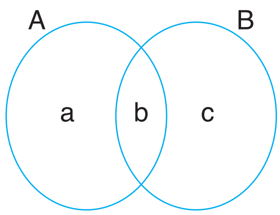
Toplantıda kaç kişi vardır?

Örnek

$A \not\subseteq B$, $B \not\subseteq A$, $A \cap B \neq \varnothing$, $s(A) = 6$ ve $s(B) = 7$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ nin en küçük değerini bulalım.

Çözüm

$s(A \cup B)$ nın en küçük değerini alması için $s(A \cap B)$ nın en büyük değerini alması gerekir.



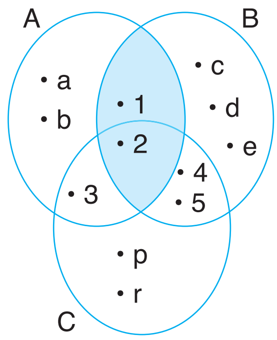
a, b, c bulundukları bölgeye ait eleman sayılarını göstersin.

$a = 1$, $b = 5$, $c = 2$ olmalıdır.

O hâlde $s(A \cup B)$ nin en küçük değeri $1 + 5 + 2 = 8$ bulunur.

Örnek

Yandaki Venn şemasında gösterilen A, B, C kümeleri için aşağıda istenenleri bulup karşılaştıralım.



a) $s(A \cup B \cup C)$

b) $s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$

Çözüm

a) $A \cup B \cup C = \{a, b, 1, 2, 3, 4, 5, c, d, e, p, r\}$ olup $s(A \cup B \cup C) = 12$ bulunur.

b) $s(A) = 5$, $s(B) = 7$, $s(C) = 6$, $s(A \cap B) = 2$, $s(A \cap C) = 2$, $s(B \cap C) = 3$ ve $S(A \cap B \cap C) = 1$ olup

$s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$

$= 5 + 7 + 6 - 2 - 2 - 3 + 1 = 12$ bulunur.

a ve b maddelerinde bulduğumuz sonuçlar eşittir.

Bilgi Kutusu

A, B ve C kümeleri için

$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$ tir.

Örnek

s(A) = 2·s(B) ve s(A ∩ B) + s(A ∪ B) = 18 olduğuna göre s(A) nı bulalım.

Çözüm

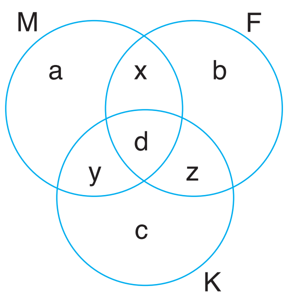
$$s(A \cap B) + s(A \cup B) = 18 \Rightarrow s(A \cap B) + s(A) + s(B) - s(A \cap B) = 18$$
$$\Rightarrow s(A) + s(B) = 18$$
$$\Rightarrow 2 \cdot s(B) + s(B) = 18$$
$$\Rightarrow 3 \cdot s(B) = 18$$
$$\Rightarrow s(B) = 6 \text{ ve } s(A) = 2 \cdot 6 = 12 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

s(A ∪ B) = 28 ve s(A) = 2·s(B) = 3·s(A ∩ B) olduğuna göre s(A) nı bulunuz.

Örnek

Bir sınıftaki öğrencilerden matematik, fizik, kimya derslerinden geçenlerin kümesi sırasıyla M, F, K olarak isimlendirilmiştir. a, b, c, d, x, y, z harfleri ise içinde bulundukları kümelerin eleman sayılarını göstermektedir.



Buna göre aşağıda istenenleri bulalım.

a) Matematik dersinden geçenlerin sayısını

b) Fizik ve kimya derslerinden geçenlerin sayısını

c) Üç dersten de geçenlerin sayısını

ç) En az iki dersten geçenlerin sayısını

d) En çok iki dersten geçenlerin sayısını

Çözüm

a) s(M) = a + x + y + d olur.

b) s(F ∩ K) = d + z olur.

c) s(F ∩ K ∩ M) = d olur.

ç) En az iki dersten geçenlerin sayısı x + y + z + d dir.

d) En çok iki dersten geçenlerin sayısı a + b + c + x + y + z dir.

Örnek

Herkesin futbol, voleybol veya basketbol oyunlarından en az birini oynadığı bilinen 25 kişilik bir sınıftaki öğrencilerin 12 si futbol, 16 sı voleybol oynayabiliyor.

Bu öğrencilerin 8 i futbol ve voleybol, 7 si voleybol ve basketbol, 6 sı futbol ve basketbol, 3 ü her üç oyunu da oynayabildiğine göre basketbol oynayan kaç öğrenci olduğunu bulalım.

Çözüm

Futbol oynayanların kümesini F, voleybol oynayanların kümesini V, basketbol oynayanların kümesini B ile gösterelim.

$s(F) = 12$, $s(V) = 16$, $s(F \cap V) = 8$, $s(V \cap B) = 7$, $s(F \cap B) = 6$,
$s(F \cap B \cap V) = 3$ ve $s(F \cup B \cup V) = 25$ tir.

$$s(F \cup B \cup V) = s(F) + s(B) + s(V) - s(F \cap B) - s(F \cap V) - s(V \cap B) + s(F \cap B \cap V)$$

$$\Rightarrow 25 = 12 + s(B) + 16 - 6 - 8 - 7 + 3 \Rightarrow 25 = 10 + s(B)$$

$$\Rightarrow s(B) = 15 \text{ bulunur.}$$

Örnek

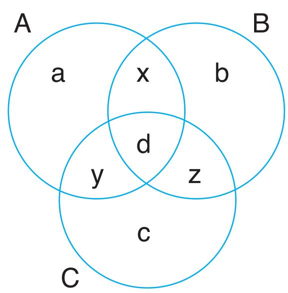
Bir sınıftaki öğrenciler huzurevini, hayvan barınaklarını ve Sevgi Evlerini ziyaret ediyor. Herkesin en az bir yeri ziyaret ettiği 36 kişilik bu sınıfta en az iki yeri ziyaret eden 12 öğrenci, en çok iki yeri ziyaret eden 32 öğrenci vardır.

Buna göre yalnız iki yeri ziyaret eden öğrenci sayısını bulalım.

Çözüm

Huzurevini ziyaret edenlerin kümesini A, hayvan barınaklarını ziyaret edenlerin kümesini B, Sevgi Evlerini ziyaret edenlerin kümesini C ile gösterelim.

a, b, c, d, x, y, z harfleri içinde bulunduğu kümelerin eleman sayılarını göstermektedir.



Herkes en az bir yeri ziyaret ettiği için $a + b + c + d + x + y + z = 36$,

En az iki yeri ziyaret edenlerin sayısı $x + y + z + d = 12$,

En çok iki yeri ziyaret edenlerin sayısı $a + b + c + x + y + z = 32$ olur.

$a + b + c + d + x + y + z = 36 \Rightarrow d = 36 - 32 = 4$ bulunur.

$x + y + z + d = 12 \Rightarrow x + y + z + 4 = 12 \Rightarrow x + y + z = 8$ bulunur.

O hâlde yalnız iki yeri ziyaret edenlerin sayısı $x + y + z = 8$ olur.

Örnek

Bir grupta bulunan 6 kişi esmer kahverengi gözlü, 4 kişi sarışın yeşil gözlüdür. Esmer yeşil gözlülerin sayısı, sarışın kahverengi gözlülerin sayısından 2 fazladır.

Grupta 26 kişi olduğuna göre sarışın kişilerin sayısını bulalım.

Çözüm

Esmer ve sarışın olanları 2 ayrı grup olarak düşünüp bunları yeşil gözlü ve kahverengi gözlü olarak ayırdığımızda 4 ayrık küme oluştururuz. Bu kümelerin eleman sayılarını aşağıdaki tabloda gösterelim.

	Yeşil gözlü	Kahverengi gözlü
Esmer	x + 2	6
Sarışın	4	x

$x + 2 + 6 + 4 + x = 26 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$ olur.

O hâlde gruptaki sarışın kişilerin sayısı $x + 4 = 7 + 4 = 11$ olur.

Örnek

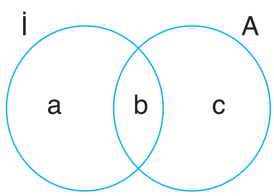
Bir şirkette çalışanların %45 i İngilizceyi, %70 i Almancayı ve 60 kişi her iki dili konuşabiliyor.

Herkesin İngilizce veya Almancadan en az birini konuşabildiği bu şirkette çalışanların sayısını bulalım.

Çözüm

a, b, c içinde bulundukları kümelerin eleman sayıları olsun.

İki dili de konuşanların sayısı b = 60 tır.



İngilizceyi konuşabilenler yani a + b kişi çalışanların %45 i, Almanca konuşabilenler yani b + c kişi çalışanların %70 idir.

Şirkette çalışanların sayısı $s(İ \cup A) = a + b + c$ olur.

$s(İ \cup A) = s(İ) + s(A) - s(İ \cap A) \Rightarrow \%100 = \%45 + \%70 - s(İ \cap A)$

$\Rightarrow s(İ \cap A) = \%15$ olur.

Çalışanların %15 i 60 kişi olduğuna göre %100 ü $\frac{60 \cdot 100}{15} = 400$ kişidir.

Bir Kümenin Tümleyeni

Otoparklarda engellilere ait araçlar için alanlar ayrılmaktadır. Engelli olmayan kişilerin bu alanlara araçlarını park etmemesi gerekir. Bu otoparkta araçlara ayrılan alanlar A_1, A_2, ..., A_6, B_1, B_2, ..., B_6, C_1, C_2, ..., C_6, şeklinde numaralandırılmıştır. 18 araçlık bu otoparkta B_2, ..., B_6 numaralı alanlar engellilerin araçlarına ayrılmıştır.

» Hiç araç yokken bu otoparka gelen engelli olmayan bir kişinin aracını park edebileceği alanların numaralarından oluşan kümeyi liste yöntemi ile yazınız.

Bilgi Kutusu

E evrensel küme olmak üzere A kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye **A kümesinin tümleyeni** denir ve bu küme **A'** ile gösterilir.

A kümesi ile A' kümesinin eleman sayılarının toplamı E kümesinin eleman sayısını verir. Yani $s(A) + s(A') = s(E)$ tir.

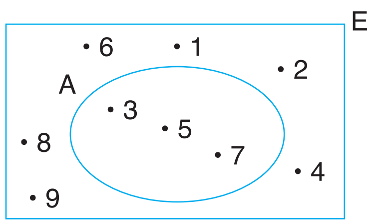
Örnek

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} ve A = {3, 5, 7} olsun.

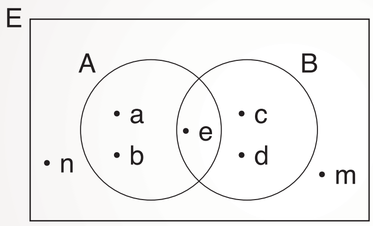
A' kümesini yazalım. Venn şeması ile gösterelim.

Çözüm

A' = {1, 2, 4, 6, 8, 9} olup Venn şeması ile gösterimi yandaki gibidir. Dikkat edilirse $A \subseteq E$ ve $A' \subseteq E$ olduğu görülür.



Sıra Sizde



Yandaki Venn şemasına göre A', B', $(A \cap B)'$ ve $(A \cup B)'$ kümelerini liste yöntemi ile yazınız.

Örnek

$s(A') = 10$, $s(B') = 7$ ve $s(B) = 17$ olduğuna göre s(A) nı bulalım.

Çözüm

$s(E) = s(B) + s(B') = 17 + 7 = 24$ olur.

$s(E) = s(A) + s(A') \Rightarrow 24 = s(A) + 10$

$\Rightarrow s(A) = 24 - 10 \Rightarrow s(A) = 14$ bulunur.

Sıra Sizde

A ve B, E evrensel kümesinin alt kümeleridir.
$s(A) + s(B') = 16$ ve $s(A') + s(B) = 14$
olduğuna göre s(E) kaçtır?

Örnek

E evrensel küme ve A herhangi bir küme olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $E' = \varnothing$

b) $\varnothing' = E$

c) $A' \cap A = \varnothing$

ç) $A' \cup A = E$

d) $(A')' = A$

! $A' = \{x | x \notin A \text{ ve } x \in E\}$

Çözüm

a) $E' = \{x \mid x \notin E \text{ ve } x \in E\} = \varnothing$ olur.

b) $\varnothing' = \{x \mid x \notin \varnothing \text{ ve } x \in E\} = \{x \mid x \in E \text{ ve } x \in E\} = \{x \mid x \in E\} = E$ olur.

c) $A' \cap A = \{x \mid x \in A' \text{ ve } x \in A\} = \{x \mid x \notin A \text{ ve } x \in A\} = \varnothing$ olur.

ç) $A' \cup A = \{x \mid x \in A' \text{ veya } x \in A\} = \{x \mid x \in E\} = E$ olur.

d) $(A')' = \{x \mid x \notin A' \text{ ve } x \in E\} = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in E\} = A \cap E = A$ olur.

Bilgi Kutusu

- Evrensel kümenin tümleyeni boş kümedir. Yani $E' = \varnothing$ tir.
- Boş kümenin tümleyeni evrensel kümedir. Yani $\varnothing' = E$ tir.
- Her A kümesi için $A' \cap A = \varnothing$ ve $A' \cup A = E$ tir.
- Her A kümesi için $(A')' = A$ tir.

! $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$

Örnek

Her A ve B kümeleri için $A \subseteq B$ ise $B' \subseteq A'$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$A \subseteq B \Rightarrow [x \in A \Rightarrow x \in B] \Rightarrow [(x \in B)' \Rightarrow (x \in A)']$$
$$\Rightarrow [x \notin B \Rightarrow x \notin A]$$
$$\Rightarrow [x \in B' \Rightarrow x \in A'] \Rightarrow B' \subseteq A' \text{ olur.}$$

Sıra Sizde

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3\}$,
$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümeleri veriliyor.
B' ile A' kümelerini bulup karşılaştırınız.

Bilgi Kutusu

Her A ve B kümesi için $A \subseteq B$ ise $B' \subseteq A'$ olur.

Örnek

A ve B herhangi iki küme olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ **b)** $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Çözüm

a) $(A \cup B)' = \{x \mid x \in (A \cup B)'\} = \{x \mid x \notin (A \cup B)\}$
$= \{x \mid [x \in (A \cup B)]'\} = \{x \mid (x \in A \text{ veya } x \in B)'\}$
$= \{x \mid x \notin A \text{ ve } x \notin B\} = \{x \mid x \in A' \text{ ve } x \in B'\}$
$= A' \cap B'$ olur.

b) $(A \cap B)' = \{x \mid x \in (A \cap B)'\} = \{x \mid x \notin (A \cap B)\}$
$= \{x \mid [x \in (A \cap B)]'\} = \{x \mid (x \in A \text{ ve } x \in B)'\}$
$= \{x \mid x \notin A \text{ veya } x \notin B\} = \{x \mid x \in A' \text{ veya } x \in B'\}$
$= A' \cup B'$ olur.

Bilgi Kutusu

De Morgan Kuralları
A ve B herhangi iki küme olmak üzere
$(A \cup B)' = A' \cap B'$ ve $(A \cap B)' = A' \cup B'$ tir.

Örnek

A ve B, E evrensel kümesinin iki alt kümesi olmak üzere
$(A \cup B) \cap (A' \cap B)'$ ifadesini en sade şekilde yazalım.

Çözüm

$(A \cup B) \cap (A' \cap B)' = (A \cup B) \cap (A \cup B')$
$= A \cup (B \cap B') = A \cup \varnothing = A$ olur.

Örnek

A ve B, E evrensel kümesinin iki alt kümesi olmak üzere
$[(A \cup B)' \cup (A \cap B')] \cup B$ ifadesini en sade şekilde yazalım.

Çözüm

$[(A \cup B)' \cup (A \cap B')] \cup B = [(A' \cap B') \cup (A \cap B')] \cup B$
$= [(A' \cup A) \cap B'] \cup B$
$= (E \cap B') \cup B = B' \cup B = E$ olur.

Sıra Sizde

A ve B, E evrensel kümesinin iki alt kümesi olmak üzere
$(A \cup B) \cap (A \cap B')'$ ifadesini en sade şekilde yazınız.

Örnek

Bir araştırmada 100 kişiye A veya B gazetelerinden hangisini okuduk-ları sorulmuştur. 55 kişi A gazetesini, 60 kişi B gazetesini okuduğunu, 24 kişi ise ikisini de okumadığını belirtmiştir.

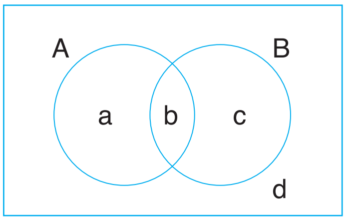
Buna göre aşağıda istenenleri bulalım.

a) A gazetesini okumayan kişi sayısı

b) B gazetesini okumayan kişi sayısı

c) A ve B gazetelerini okumayan kişi sayısı

Çözüm



a, b, c, d içinde bulundukları kümelerin eleman sayılarını göstermektedir.

$a + b = 55$, $b + c = 60$, $d = 24$, $a + b + c + d = 100$ olur.

$a + b + c + d = 100 \Rightarrow 55 + c + 24 = 100 \Rightarrow c = 21$,

$b + c = 60 \Rightarrow b = 60 - 21 = 39$,

$a + b = 55 \Rightarrow a = 55 - 39 = 16$ olur.

a) A gazetesini okumayan $s(A') = c + d = 21 + 24 = 45$ kişidir.

b) B gazetesini okumayan $s(B') = a + d = 16 + 24 = 40$ kişidir.

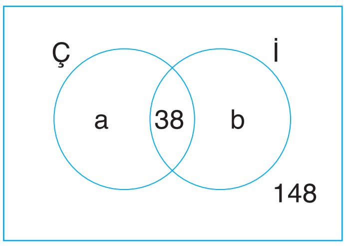
c) A ve B gazetelerini okumayan
$s\left((A \cap B)'\right) = a + c + d = 16 + 21 + 24 = 61$ kişidir.

Örnek

Bir okulda Çanakkale'ye ve İstanbul'a iki farklı gezi düzenlenmiştir. Çanakkale gezisine gitmeyenlerin sayısı İstanbul gezisine gitmeyenlerin sayısından 42 fazladır. Gezilerin her ikisine de giden 38 kişi ve ikisine de gitmeyen 148 kişidir.

Okulun mevcudu 450 olduğuna göre İstanbul gezisine giden kaç kişi olduğunu bulalım.

Çözüm



Çanakkale ve İstanbul gezilerine gidenlerin kümesi sırayla Ç ve İ olsun. Kümelerin içindeki harfler ve sayılar o kümelerin eleman sayılarını göstermektedir.

Çanakkale gezisine gitmeyenlerin sayısı $b + 148$, İstanbul gezisine gitmeyenlerin sayısı $a + 148$ olduğundan

$b + 148 = a + 148 + 42 \Rightarrow b = a + 42$ olur.

$a + b + 38 + 148 = 450 \Rightarrow a + b = 264$

$\Rightarrow a + a + 42 = 264 \Rightarrow a = 111$ olur.

$b = a + 42 \Rightarrow b = 111 + 42 = 153$ bulunur.

O hâlde İstanbul gezisine gidenlerin sayısı $38 + b = 38 + 153 = 191$ olur.

Kümeler ile Sembolik Mantık Arasındaki İlişki

Kümeler ile sembolik mantık arasındaki ilişkilerden bazıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Sembolik Mantık	Kümeler
0	$\varnothing$
1	E
$\vee$	$\cup$
$\wedge$	$\cap$
$'$ (Değili)	$'$ (Tümleyeni)
$\equiv$	$=$
$(p')' \equiv p$	$(A')' = A$
$p \wedge p' \equiv 0$	$A \cap A' = \varnothing$
$p \vee p' \equiv 1$	$A \cup A' = E$
$1 \wedge 0 \equiv 0$	$E \cap \varnothing = \varnothing$
$1 \vee 0 \equiv 1$	$E \cup \varnothing = E$
$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$	$(A \cup B)' = A' \cap B'$
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Örnek

$(A \cup B) \cap (A' \cap B)'$ işlemini sembolik mantık kurallarını kullanarak en sade biçiminde yazalım.

Çözüm

Kümeler ile sembolik mantık arasındaki ilişkilerden yararlanarak A kümesi yerine p önermesi, B kümesi yerine q önermesi, $\cup$ işlemi yerine $\vee$, $\cap$ işlemi yerine $\wedge$ yazarsak $(p \vee q) \wedge (p' \wedge q)'$ önermesini elde ederiz.

Mantık kurallarını uygularsak
$(p \vee q) \wedge (p' \wedge q)' \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee q') \equiv p \vee (q \wedge q') \equiv p \vee 0 \equiv p$ elde ederiz.

A kümesini p önermesi ile gösterdiğimiz için $(A \cup B) \cap (A' \cap B)' = A$ olur.

Örnek

$[(A \cup B)' \cap (A \cap B')]' \cup A$ işlemini sembolik mantık kurallarını kullanarak en sade biçimde yazalım.

Çözüm

A kümesi yerine p önermesi, B kümesi yerine q önermesi, $\cup$ işlemi yerine $\vee$, $\cap$ işlemi yerine $\wedge$ yazarsak $[(p \vee q)' \wedge (p \wedge q')]' \vee p$ önermesini elde ederiz. Mantık kurallarını uygularsak

$$[(p \vee q)' \wedge (p \wedge q')]' \vee p \equiv [(p \vee q) \vee (p' \vee q)] \vee p$$
$$\equiv [(p \vee p') \vee (q \vee q)] \vee p$$
$$\equiv (1 \vee q) \vee p \equiv 1 \vee p \equiv 1 \text{ elde ederiz.}$$

Sembolik mantıkta 1, kümelerde E ile gösterildiğinden

$[(A \cup B)' \cap (A \cap B')]' \cup A = E$ olur.

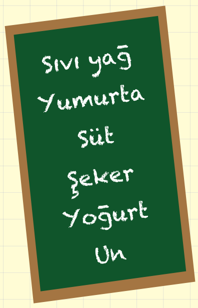
Sıra Sizde

$[(A' \cap B) \cup A] \cup (A' \cap B')'$ işlemini sembolik mantık kurallarını kullanarak en sade biçimde yazınız.

Kümelerde Fark İşlemi

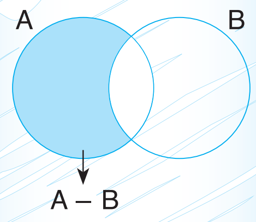
! $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

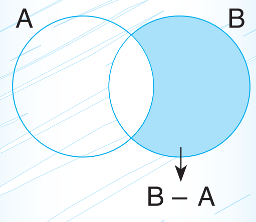
Zübeyde misafirlerine kek yapacaktır. Evinde yoğurt, un, süt, kakao ve pasta kreması vardır. Yapacağı kekin tarifinde kullanılacak malzemelerin olduğu liste yanda verilmiştir.



» Malzeme listesinde olup Zübeyde'nin evinde olmayan malzemeleri söyleyiniz.

» Zübeyde'nin evinde olup malzeme listesinde olmayan malzemeleri söyleyiniz.





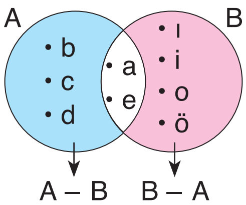
Bilgi Kutusu

A ve B iki küme olmak üzere A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye **A fark B kümesi** denir. A – B veya A \ B ile gösterilir.

Örnek

$A = \{a, b, c, d, e\}$ ve $B = \{a, e, ı, i, o, ö\}$ kümeleri için $A - B$ ve $B - A$ kümelerini yazalım. Venn şeması ile gösterelim.

Çözüm

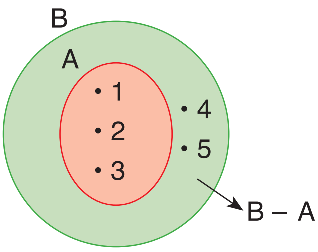


A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların kümesi $A - B = \{b, c, d\}$, B kümesinde olup A kümesinde olmayan elemanların kümesi $B - A = \{ı, i, o, ö\}$ şeklindedir. Bu kümelerin Venn şeması ile gösterimi yandaki gibidir.

Örnek

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümeleri için $B - A$ kümesini yazalım. Venn şeması ile gösterelim.

Çözüm



$B - A = \{4, 5\}$ olup Venn şeması ile gösterimi yandaki gibidir.

Örnek

$A \neq B$ olmak üzere $A - B = A \cap B'$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in B'\} = A \cap B'$ olur.

Bilgi Kutusu

> $A \neq B$ olmak üzere $A - B = A \cap B'$ tir.

Örnek

$A \neq B$ olmak üzere $A - B \neq B - A$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$A - B = A \cap B'$ ve $B - A = B \cap A'$ olup $A - B \neq B - A$ dır.

Sıra Sizde

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümeleri için $A - B$ ve $B - A$ kümelerini bulup karşılaştırınız.

Bilgi Kutusu

$A \neq B$ olmak üzere $A - B \neq B - A$ dir.

Örnek

$A \subseteq E$ olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $A - A = \varnothing$ **b)** $\varnothing - A = \varnothing$ **c)** $A - \varnothing = A$

Çözüm

a) $A - A = \{x \mid x \in A \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in A'\} = A \cap A' = \varnothing$ olur.

b) $\varnothing - A = \{x \mid x \in \varnothing \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \in \varnothing \wedge x \in A'\} = \varnothing \cap A' = \varnothing$ olur.

c) $A - \varnothing = \{x \mid x \in A \wedge x \notin \varnothing\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in \varnothing'\}$

$= \{x \mid x \in A \wedge x \in E\} = A \cap E = A$ olur.

Bilgi Kutusu

$A \subseteq E$ olmak üzere

- $A - A = \varnothing$,
- $\varnothing - A = \varnothing$,
- $A - \varnothing = A$ tir.

Örnek

$A \subseteq E$ olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $A - E = \varnothing$ **b)** $E - A = A'$

Çözüm

a) $A - E = \{x \mid x \in A \wedge x \notin E\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in E'\}$

$= \{x \mid x \in A \wedge x \in \varnothing\} = A \cap \varnothing = \varnothing$ olur.

b) $E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \in E \wedge x \in A'\} = E \cap A' = A'$ olur.

Bilgi Kutusu

$A \subseteq E$ olmak üzere

- $A - E = \varnothing$,
- $E - A = A'$ tir.

Bilgi Kutusu

$s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$ tir.

Örnek

$s(A - B) = 3$, $s(B - A) = 6$ ve $s(A \cup B) = 12$ olduğuna göre s(B) nı bulalım.

Çözüm

$s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B) \Rightarrow 12 = 3 + 6 + s(A \cap B)$

$\Rightarrow s(A \cap B) = 3$ olur.

$s(B) = s(B - A) + s(A \cap B) = 6 + 3 = 9$ bulunur.

Örnek

$A \neq B$ ve $A \cap B \neq \varnothing$, $s(A - B) = 2x - 1$, $s(B - A) = 3 - x$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ nın en az kaç olacağını bulalım.

Çözüm

$s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$ dir. $s(A \cup B)$ nin en az olması için $s(A \cap B)$ en az olmalıdır. $A \cap B \neq \varnothing$ olduğundan $s(A \cap B)$ en az 1 dir.

$s(A \cup B) = 2x - 1 + 3 - x + 1 = x + 3$ olur.

x in en küçük değeri için 1 verebiliriz. O hâlde $s(A \cup B) = 1 + 3 = 4$ olur.

Örnek

A ve B boş kümeden farklı iki küme olsun.

$3 \cdot s(A \cap B) = s(B - A) = 2 \cdot s(A - B)$ ve $s(A \cup B) = 33$ olduğuna göre $s(A \cap B)$ kaçtır?

Çözüm

$3 \cdot s(A \cap B) = s(B - A) = 2 \cdot s(A - B)$ olduğuna göre

$s(A \cap B) = 2k$, $s(B - A) = 6k$, $s(A - B) = 3k$ olur.

$s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$

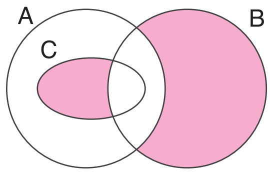
$\Rightarrow 33 = 3k + 6k + 2k \Rightarrow 33 = 11k \Rightarrow k = 3$ olur.

O hâlde $s(A \cap B) = 2k = 2 \cdot 3 = 6$ bulunur.

Sıra Sizde

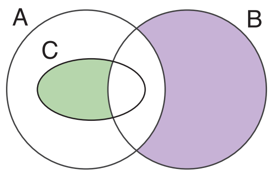
Boş kümeden farklı A ve B kümeleri için
$s(A \cup B) = 3 \cdot s(A - B) = 4 \cdot s(B - A)$ ve $s(A \cap B) = 10$
olduğuna göre $s(A \cup B)$ kaçtır?

Örnek



Yandaki Venn şemasında verilen boyalı bölgeyi ifade eden kümeyi yazalım.

Çözüm



Yeşil renkle boyalı olan bölge C – B, mor renkle boyalı olan bölge B – A kümelerini ifade ettiğinden verilen boyalı bölgeyi $(C - B) \cup (B - A)$ şeklinde yazabiliriz.

Örnek

Bir sınıfta matematik dersinden başarılı olan herkes kimya dersinden de başarılıdır. Kimya dersinden başarılı olup matematik dersinden başarısız olan öğrencilerin sayısı, matematik dersinden başarılı olan öğrencilerin sayısından 10 fazladır.

Bu sınıfta kimya dersinden başarılı olan 28 öğrenci olduğuna göre matematik dersinden başarılı olan öğrenci sayısını bulalım.

Çözüm

Matematik dersinden başarılı olan öğrencilerin kümesi M, kimya dersinden başarılı olan öğrencilerin kümesi K olsun.

$M \subseteq K$ ve $s(K - M) = s(M) + 10$ ve $s(K) = 28$ olur. O hâlde

$s(K - M) + s(M) = s(K) \Rightarrow s(M) + 10 + s(M) = 28$

$\Rightarrow 2 \cdot s(M) = 18 \Rightarrow s(M) = 9$ olur.

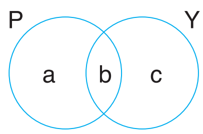
Örnek

Bir gruptaki öğrenciler piyano veya yüzme kursuna gitmektedir. 21 kişilik bu grupta yüzme kursuna gidip piyano kursuna gitmeyen 7 ve yüzme kursuna gitmeyen 8 öğrenci vardır.

Grupta 21 öğrenci olduğuna göre piyano ve yüzme kursuna giden öğrenci saysını bulalım.

Çözüm

Piyano kursuna giden öğrencilerin kümesini P, yüzme kursuna giden öğrencilerin kümesini Y ile gösterelim. a, b, c harfleri içinde bulunduğu kümelerin eleman sayılarını göstermek üzere

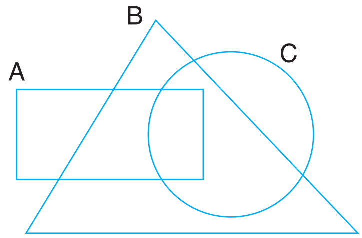


$c = 7$, $a = 8$, $a + b + c = 21$ olur.

$a + b + c = 21 \Rightarrow 8 + 7 + b = 21 \Rightarrow b = 6$ bulunur.

1. $s(A \cap B') = 6$, $s(A \cap B) = 4$, $s(A \cup B) = 15$ olduğuna göre $s(B - A)$ kaçtır?

2. Yanda verilen Venn şemasında $[(A \cap B) \cup (B \cap C)] - (A \cap B \cap C)$ kümesini boyayarak gösteriniz.



3. $s(A) = 8$, $s(B) = 4$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

4. $s(A) = s(B) = s(C) = 10$, $s(A \cap B) = s(A \cap C) = s(B \cap C) = 2 \cdot s(A \cap B \cap C)$ ve $s(A \cup B \cup C) = 20$ olduğuna göre $s(A \cap B \cap C)$ kaçtır?

5. A ve B, E evrensel kümesinin iki alt kümesi olmak üzere $(A' \cup B)' \cup (A \cap B)$ ifadesinin en sade şeklini yazınız.

6. $A' \cup [(A \cup B)' \cup B]$ işleminin sembolik mantık kurallarını kullanarak en sade şekilde yazınız.

7. 38 kişilik bir sınıfta matematik kursuna gitmeyen 16 kişi, fizik kursuna gitmeyen 24 kişi ve her iki kursa giden 8 kişi vardır.
Buna göre iki kursa da gitmeyen kaç kişi vardır?

8. Bir seyahat acentasında çalışanlar Rusça ve İngilizceden en az birini bilmektedir. Rusçayı bilenlerin sayısı İngilizceyi bilenlerin sayısının 2 katı, sadece İngilizceyi bilenlerin sayısının 3 katıdır.
Acentada 24 kişi çalıştığına göre Rusçayı bilen kaç kişi vardır?

9. Dans veya tiyatro kursundan en az birine gidenlerden oluşan bir gruptaki kişilerin %54 ü dans kursuna, %58 i tiyatro kursuna gitmektedir.
Bu grupta her iki kursa giden 24 kişi olduğuna göre gruptaki kişi sayısı kaçtır?

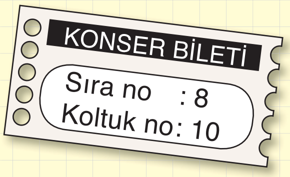
10. 41 kişilik bir sınıftaki sarışın erkeklerin sayısı esmer erkeklerin sayısının yarısı, sarışın kızların sayısının 2 katıdır.
Bu sınıftaki esmer kız sayısı 6 olduğuna göre sarışın kişi sayısı kaçtır?

9.2.2.2. İki Kümenin Kartezyen Çarpımı

Sıralı İkili

Konsere bilet alan Erkan sıra numarasını ve koltuk numarasını aklında (sıra no, koltuk no) olacak şekilde tutuyor. Konser salonunda iken (10, 8) olarak hatırlıyor ve 10. sıradaki 8 nolu koltuğa oturuyor.

» Yandaki bilet Erkan'ın bileti olduğuna göre Erkan biletini aldığı koltuğa mı oturmuştur?



Bilgi Kutusu

A ve B boş olmayan iki küme olsun. A kümesinden a elemanı, B kümesinden b elemanı alınarak yazılan (a, b) biçimindeki elemana **sıralı ikili** denir. a ya birinci bileşen, b ye ikinci bileşen denir. Sıralı ikilide bileşenlerin yazılış sırası önemlidir. Yani $(a, b) \neq (b, a)$ dir.

Örnek

0 ile 6 arasındaki tam sayılardan (tek sayı, asal sayı) şeklinde beş tane sıralı ikili yazalım.

Çözüm

0 ile 6 arasındaki tek sayıların kümesi $A = \{1, 3, 5\}$ ve asal sayıların kümesi $B = \{2, 3, 5\}$ tir. (tek sayı, asal sayı) şeklinde yazılabilecek sıralı ikililerden beşi (3, 3), (5, 2), (1, 2), (3, 5), (3, 2) olur.

Bilgi Kutusu

(a, b) ve (c, d) şeklindeki iki sıralı ikilinin birinci bileşenleri birbirine, ikinci bileşenleri birbirine eşitse bu sıralı ikililer birbirine eşittir ve (a, b) = (c, d) şeklinde yazılır.

$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ tir.

Örnek

(3x – 1, 7) = (–4, 2y – 3) eşitliğini sağlayan x ve y sayılarını bulalım.

Çözüm

Sıralı ikililerin eşitliğinde birinci bileşenler birbirine, ikinci bileşenler birbirine eşittir.O hâlde

$3x - 1 = -4 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$ ve $2y - 3 = 7 \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = 5$ bulunur.

Kartezyen Çarpım

Ankara'dan Sivas'a hava, kara ve demir yolu ile; Sivas'tan Antalya'ya hava ve kara yolu ile ulaşım sağlanabilmektedir.

» Ankara'dan Sivas'a, Sivas'tan da Antalya'ya gitmek isteyen bir kişinin kaç farklı yoldan gidebileceğini söyleyiniz ve bu seçenekleri sıralı ikililer şeklinde yazınız.

! İki kümenin kartezyen çarpımı sıralı ikililerden oluşan bir kümedir.

Bilgi Kutusu

A ve B boş olmayan iki küme olsun. Birinci bileşeni A, ikinci bileşeni B kümesinin elemanı olan tüm sıralı ikililerin kümesine **A ile B kümelerinin kartezyen çarpımı** denir ve A x B şeklinde gösterilir.

! $AxB = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$

Örnek

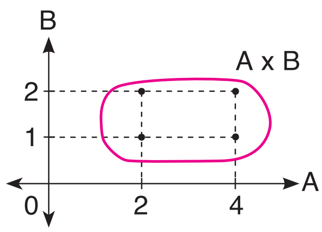
A = {2, 4} ve B = {1, 2} kümeleri veriliyor.

A x B kümesini liste biçiminde yazarak grafiğini çizelim.

Çözüm

A x B = {(2, 1), (2, 2), (4, 1), (4, 2)} olur.

A x B kümesinin elemanı olan sıralı ikililere koordinat sisteminde karşılık gelen noktalar A x B nin grafiğini oluşturur.



Rene Descartes
(Röne Deskart)
(1596-1650)

Fransız matematikçi, bilim adamı ve filozoftur. Matematiğe en büyük katkısı analitik geometri üzerine yaptığı çalışmalardır. Cebirin geometriye uygulanması üzerine çalışmış, kartezyen geometri ifadesini ortaya atmıştır. Kartezyen koordinat sisteminin onun tarafından bulunduğu kabul edilir.

Örnek

A = {x | 0 < x < 3, x tam sayı} ve B = {–2, –1, 0} kümeleri veriliyor.

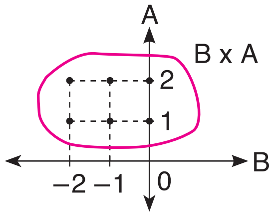
B x A kümesini liste biçiminde yazarak grafiğini çizelim.

Çözüm

A = {1, 2}, B = {–2, –1, 0} için

B x A = {(–2, 1), (–1, 1), (0, 1), (–2, 2), (–1, 2), (0, 2)} olur.

B x A nın grafiği yandaki gibidir.



Sıra Sizde

A = {x | 2 ≤ x < 5, x asal sayı}, B = {–2, –1, 0} kümeleri için A x B nin grafiğini çiziniz.

Örnek

A = {1, 2, 3} ve B = {a, b, c} kümeleri veriliyor.

A x B kümesini yazalım ve s(A x B) nı bulalım.

Çözüm

A x B = {(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b), (1, c), (2, c), (3, c)} dir.
O hâlde s(A x B) = 9 olur.

Bilgi Kutusu

s(A x B) = s(A)·s(B) tir.

Örnek

s(A x A) = 16 olduğuna göre s(A) nı bulalım.

Çözüm

s(A x A) = s(A)·s(A) ⇒ $[s(A)]^2$ = 16 ⇒ s(A) = 4 bulunur.

Örnek

A = {1, 2}, B = { } kümeleri için A x B ve B x A kümelerini bulalım.

Çözüm

B boş küme olduğu için sıralı ikililer yazılamaz. Bu nedenle A x B = ∅ ve B x A = ∅ olur.

Bilgi Kutusu

- $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$ dir.
- $A \times B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$ veya $B = \varnothing$ tir.

Örnek

$A = \{1, 2\}$ ve $B = \{a, b\}$ kümeleri veriliyor.

A x B ve B x A kümelerini yazarak karşılaştıralım.

Çözüm

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$ ve

$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$ olur.

A x B ve B x A kümelerini karşılaştırdığımızda kümelerin birbirine eşit olmadığını görürüz.

Bilgi Kutusu

Kartezyen çarpım işleminin değişme özelliği yoktur. Yani $A \times B \neq B \times A$ dir.

Örnek

$A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{b, 2\}$ kümeleri için aşağıdaki kümeleri yazarak karşılaştıralım.

a) $A \times (B \cap C)$ **b)** $(A \times B) \cap (A \times C)$

Çözüm

a) $B \cap C = \{b\}$ olup $A \times (B \cap C) = \{(1, b), \{2, b)\}$ dir.

b) $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$ ve

$A \times C = \{(1, b), (1, 2), (2, b), (2, 2)\}$ dir.

Buradan $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, b), (2, b)\}$ dir.

a ve b maddelerinde bulduğumuz kümeleri karşılaştırdığımızda kümelerin birbirine eşit olduğunu görürüz.

Sıra Sizde

$A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{b, 2\}$ kümeleri için aşağıda istenenleri yazıp karşılaştırınız.

a) $(B \cap C) \times A$ ile $(B \times A) \cap (C \times A)$

b) $A \times (B \cup C)$ ile $(A \times B) \cup (A \times C)$

c) $(B \cup C) \times A$ ile $(B \times A) \cup (C \times A)$

Bilgi Kutusu

- Kartezyen çarpım işleminin birleşim işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır. Yani
  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ve
  $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$ tir.
- Kartezyen çarpım işleminin kesişim işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır. Yani
  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
  $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$ tir.

Örnek

$A = \{x \mid 3 \leq x < 5, x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{y \mid -2 \leq y \leq 1, y \in \mathbb{Z}\}$ ve $C = \{1, 2\}$ kümeleri veriliyor.

$s[(A \times C) \cup (A \times B)]$ nı bulalım.

Çözüm

$A = \{3, 4\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1\}$, $C = \{1, 2\}$ ve $C \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dir.

$s(A) = 2$ ve $s(C \cup B) = 5$ olduğundan

$s[(A \times C) \cup (A \times B)] = s[A \times (C \cup B)] = s(A) \cdot s(C \cup B) = 2 \cdot 5 = 10$ bulunur.

Örnek

$s(A) = 2$, $s(B) = 6$, $s(C) = 8$ olduğuna göre $(A \times B) \cap (A \times C)$ kümesinin eleman sayısının en çok kaç olacağını bulalım.

Çözüm

$s[(A \times B) \cap (A \times C)] = s[(A \times (B \cap C)]$ dir.

$s(B \cap C)$ nin en büyük değerini alması için $B \subseteq C$ olmalıdır.

O hâlde $s(B \cap C) = 6$ olur.

$s[A \times (B \cap C)] = s(A) \cdot s(B \cap C) = 2 \cdot 6 = 12$ bulunur.

1. Aşağıda verilen eşitliklerde x ve y değerlerini bulunuz.

a) $(2^x + 1, y^3) = (17, 27)$

b) $(3x + 4, 3) = (13, x - y)$

c) $(x - y, 4) = (5, x + y)$

2. Aşağıda verilen kümeler için A x B ve B x A kümelerini yazınız ve grafiklerini çiziniz.

a) A = {–2, 0, 2} ve B = {3, 5}

b) A = {1, 2} ve B = {–2, –1}

c) A = {4} ve B = {4}

3. s(A) = 6 olduğuna göre s(A x A) kaçtır?

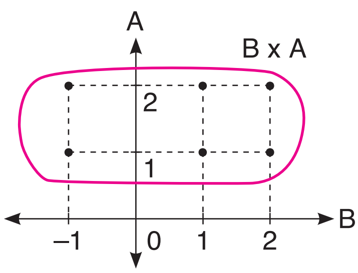
4. A = {1, 2, 3} olmak üzere A x A kümesinin elemanlarını dışarıda bırakmayan en küçük çaplı dairenin yarıçapının uzunluğunu bulunuz.

5. s(A) = 4, s(A x B) = 12, s(A ∪ B) = 5 olduğuna göre s(A ∩ B) kaçtır?

6. s(A) = 4, s(B) = 5 ve s(C) = 7 olduğuna göre [(A x B) ∪ (A x C)] en çok kaç olur?

7. A = {a, b, c, d}, B = {c, d, e, f} ve C = {e, f, g, h} olduğuna göre s[(A x B) ∪ (A x C)] ve s[(A x C) ∩ (B x C)] kaçtır?

8.



Yanda B x A kümesinin grafiği verilmiştir.
C = {0, 1, 2} olduğuna göre s[A x (B ∩ C)] kaçtır?

1. Aşağıdaki kümelerden hangisinin eleman sayısı diğerlerinden farklıdır?

A) $K = \{x \mid -2 \leq x < 4,\ x \in \mathbb{N}\}$

B) $L = \{x \mid x^2 < 10,\ x \in \mathbb{N}\}$

C) $M = \{x \mid -5 < x \leq -1,\ x \in \mathbb{Z}\}$

D) $N = \{x \mid x$, 6 nın tam sayı bölenleri$\}$

E) $P = \{x \mid x$, 10 dan küçük asal sayı$\}$

2. A ve B, E evrensel kümesinin ayrık olmayan iki alt kümesidir.

$A \not\subseteq B$, $s(A) = 4$ ve $s(B) = 8$

olduğuna göre $s(A \cup B)$ en az kaçtır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

3. $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}, c\}$

kümesi için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $a \in A$ B) $\{a\} \subset A$

C) $\{a, b\} \subset A$ D) $\{a, b\} \in A$

E) $\{c\} \in A$

4. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ ve E evrensel kümesi için $A \cup B \cup C = E$ tir.

Buna göre $(B' - A) \cup (B - C')$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{\ \}$ B) $\{4, 5, 6\}$

C) $\{5, 6, 7, 8\}$ D) $\{4, 5, 6, 7\}$

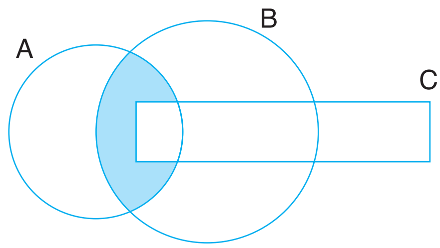
E) $\{4, 5, 6, 7, 8\}$

5. A kümesinin alt küme sayısı B kümesinin öz alt küme sayısından 95 eksiktir.

$s(A) = 5$ olduğuna göre $s(B)$ kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

6.



Venn şemasında gösterilen boyalı bölgeyi gösteren küme aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $(A \cap B) - C$ B) $(B - A) - C$

C) $A' \cap B \cap C$ D) $A \cap B' \cap C$

E) $(A - C) \cup B$

7. Eleman sayılarının toplamı 8 olan iki kümenin alt kümelerinin sayılarının toplamı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 32 B) 40 C) 68 D) 128 E) 257

8. A ve B, E evrensel kümesinin iki alt kümesidir.

$s(A - B) = 3$

$s(A') = 9$

$s(B) = 10$

$s(E) = 2 \cdot s(A)$

olduğuna göre $s[(A \cup B)']$ kaçtır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

9. A ve B, E evrensel kümesinin iki alt kümesidir.

$s(A' \cap B') = 4$

$s(E) = 28$

$4 \cdot s(A \cap B) = 2 \cdot s(A - B) = s(B)$

olduğuna göre s(A) kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

10. $(A - B)' \cup (A \cap B)'$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) E B) ∅ C) A D) A E) $A \cap B$

11. İngilizce, Almanca, Rusçadan en az birini bilenlerden oluşan bir grupta İngilizceyi bilen Almancayı, Almancayı bilen Rusçayı bilmiyor.

İngilizceyi bilmeyen 7, Rusçayı bilmeyen 10 ve yalnız bir dil bilen 13 kişi olduğuna göre Almancayı bilen kaç kişi vardır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

12. Bir sınıftaki öğrencilerin %70 i yüzme, %40 ı okçuluk kursuna gidiyor.

Yüzme ve okçuluk kurslarından herhangi birine gitmeyenler sınıfın %30 u olduğuna göre iki kursa birden gidenler sınıfın yüzde kaçıdır?

A) 10 B) 30 C) 40 D) 60 E) 80

13. 35 kişilik bir sınıfta satranç oynayanların, dama oynayanların ve hiçbirini oynamayanların sayıları birbirine eşittir.

İkisini birlikte oynayan 4 kişi olduğuna göre bu sınıfta satranç oynayan kaç kişi vardır?

A) 15 B) 13 C) 12 D) 10 E) 9

14. $(3^{x+y}, x - 2) = (27, y + 3)$

olduğuna göre x^y kaçtır?

A) –4 B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

15. $B = \{1, 2, 3, 4\}$

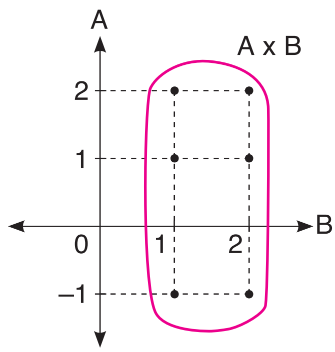
$C = \{4, 5\}$

$s[(B \times A) \cup (C \times A)] = 60$

olduğuna göre s(A) kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 10 D) 12 E) 15

16. Aşağıda A x B nin grafiği verilmiştir.

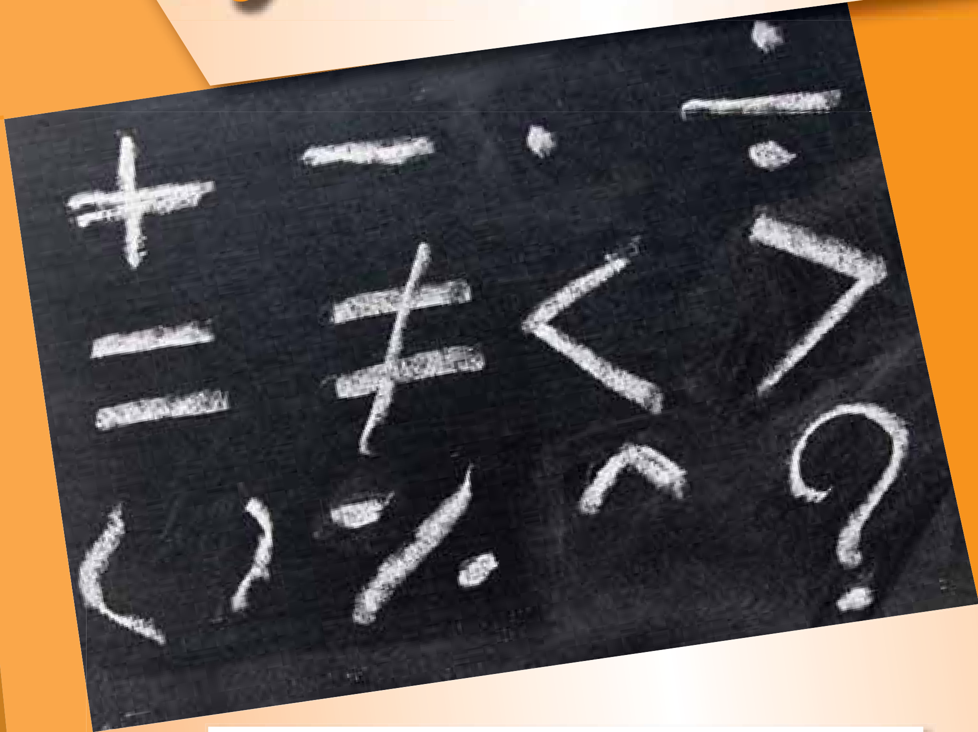


Buna göre $s(A \cap B)$ kaçtır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

SAYILAR VE CEBİR

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER



Neler Öğreneceğiz?

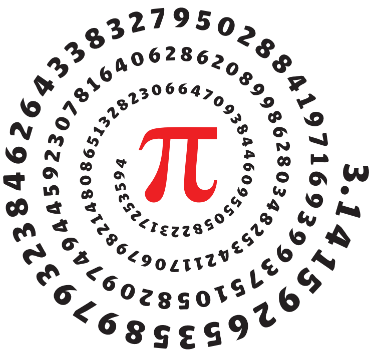
- Sayı kümeleri
- Bölünebilme kuralları
- Tam sayılarda EBOB ve EKOK ile ilgili uygulamalar
- Periyodik olarak tekrar eden durumları içeren problemler
- Gerçek sayılar kümesinde aralık kavramı
- Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler
- Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler
- Mutlak değer içeren birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler
- Mutlak değer içeren birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler
- Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemleri
- Birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik sistemleri
- Üslü ifadeleri içeren denklemler
- Köklü ifadeleri içeren denklemler
- Oran ve orantı kullanarak problem çözme
- Denklemler ve eşitsizlikler ile ilgili problemler

Nerelerde Karşımıza Çıkar?

Yaşadığımız dünyayı ve evreni doğru tanımlayabilmek için tüm sayı kümelerine ihtiyacımız vardır. Gerçek hayatta karşılaşılan birçok problemin denklem ya da eşitsizliklerle ifade edilmesi bu durumların anlaşılmasını ve yorumlanmasını kolaylaştırır. Sayıların üslü biçimde gösterimi ve bu gösterimlerin kullanılması işlemlerde kolaylık sağlar.

9.3.1. SAYI KÜMELERİ

Pi sayısı, matematik biliminde oldukça geniş bir alanda kullanılan ve merak uyandıran bir sabit sayıdır. Pi sayısı, bir dairenin çevresinin çapına bölünmesi ile bulunur ve "π" sembolü ile gösterilir.



Pi sayısı 3,141592653589793... şeklinde devam eden bir sayıdır.

❉ π sayısını iki tam sayının oranı şeklinde yazabilir misiniz?

9.3.1.1. Sayı Kümeleri

$A = \{x \mid -8 \leq x < 3,\ x \in \mathbb{Z}\}$ kümesi veriliyor.

» A kümesindeki elemanlardan doğal sayı, tam sayı, negatif tam sayı ve pozitif tam sayı olanları söyleyiniz.

» Herhangi iki ardışık tam sayı arasındaki rasyonel sayılar sayılabilir çoklukta mıdır?

Sembol ve Gösterimler

$\mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}'$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{Z}^+$

$\mathbb{Q}^+$

$\mathbb{R}^+$

$\mathbb{Z}^-$

$\mathbb{Q}^-$

$\mathbb{R}^-$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$

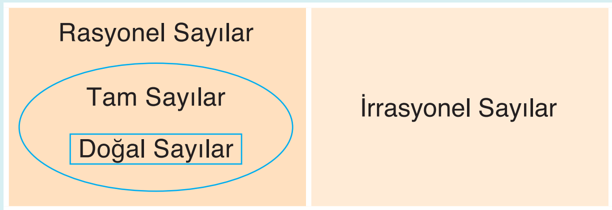
Bilgi Kutusu

- Doğal Sayılar Kümesi: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- Tam Sayılar Kümesi: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- Pozitif Tam Sayılar Kümesi: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
- Negatif Tam Sayılar Kümesi: $\mathbb{Z}^- = \{..., -4, -3, -2, -1\}$
- Rasyonel Sayılar Kümesi: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ \text{EBOB}(a,b) = 1\right\}$
- İrrasyonel Sayılar Kümesi ($\mathbb{Q}'$): $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılamayan sayılar irrasyonel sayılardır.
- Gerçek Sayılar Kümesi ($\mathbb{R}$): Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimi gerçek sayılar kümesidir.

Bilgi Kutusu

Tüm sayı kümeleri arasındaki ilişki aşağıdaki Venn Şeması üzerinde gösterilmiştir.

Gerçek Sayılar



Venn Şemasından görüldüğü gibi,
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$ ve $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ tir.

! $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$

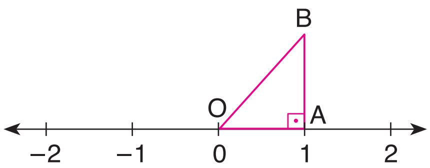
! Pozitif rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}^+$, negatif rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}^-$ sembolleri ile gösterilir.

Örnek

$\sqrt{2}$ sayısının sayı doğrusu üzerindeki yerini gösterelim.

Çözüm

$\sqrt{2}$ sayısının sayı doğrusundaki yerini bulabilmek için sayı doğrusu üzerine aşağıdaki gibi eşit kenarları 1 birim olan ikiz kenar dik üçgen çizelim.



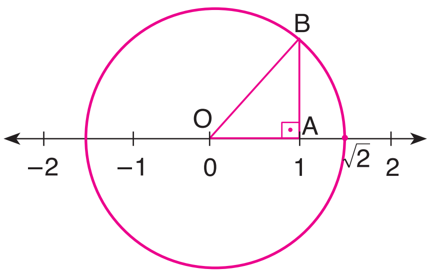
$\widehat{AOB}$ nde Pisagor teoreminden,

$|OB|^2 = |OA|^2 + |AB|^2$

$|OB|^2 = 1^2 + 1^2$

$|OB| = \sqrt{2}$ birimdir.

Pergelin ucunu O noktasına yerleştirerek aşağıdaki gibi yarıçapı [OB] olan bir çember çizelim.



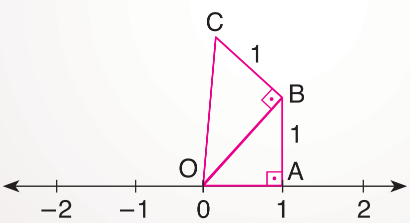
Çemberin sayı doğrusunu pozitif tarafta kestiği nokta, $\sqrt{2}$ sayının sayı doğrusundaki yeridir.

! Pozitif gerçek sayılar kümesi $\mathbb{R}^+$, negatif gerçek sayılar kümesi $\mathbb{R}^-$ sembolleri ile gösterilir.

! $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$

Sıra Sizde

Aşağıdaki sayı doğrusu üzerine çizilen üçgenlerden yararlanarak $\sqrt{3}$ sayısının sayı doğrusu üzerindeki yerini bulunuz.



$|OA| \perp |AB|$

$|BC| \perp |OB|$

$|OA| = |AB| = 1$ birim

$|BC| = 1$ birim

Örnek

Aşağıda verilen sayılardan rasyonel ve irrasyonel olanları belirleyelim.

- 2, 5
- 3, 444 ...
- $\sqrt{3} = 1{,}73205080 \ldots$
- $\pi = 3{,}14159265 \ldots$

> ! İrrasyonel sayıların ondalık kısımları herhangi bir tekrarlama olmaksızın sonsuza kadar devam etmektedir.

Çözüm

$2{,}5 = \dfrac{25}{10}$ ve $3{,}444 \ldots = 3{,}\overline{4} = \dfrac{34-3}{9} = \dfrac{31}{9}$ olur.

2,5 ve 3,444... sayıları iki tam sayının oranı şeklinde yazılabildiğinden rasyonel sayılardır.

$\sqrt{3}$ ve π sayıları ise iki tam sayının oranı şeklinde yazılamaz. Bu nedenle irrasyonel sayılardır.

Gerçek Sayılar Kümesinde Toplama İşleminin Özellikleri

Örnek

Aşağıda verilen işlemleri yapalım. Bulduğumuz sonuçların hangi sayı kümesine ait olduğunu söyleyelim.

a) $2 + \dfrac{1}{2}$ **b)** $\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ **c)** $(-5) + \left(-\dfrac{1}{3}\right)$

Çözüm

a) $2 + \dfrac{1}{2} = \underset{(2)}{\dfrac{2}{1}} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4+1}{2} = \dfrac{5}{2}$ olur.

b) $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ olur.

c) $(-5) + \left(-\dfrac{1}{3}\right) = \left(-\underset{(3)}{\dfrac{5}{1}}\right) + \left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{-15-1}{3} = -\dfrac{16}{3}$ olur.

a, b ve c maddelerinde yaptığımız işlemlerin sonuçları gerçek sayılar kümesine aittir.

Bilgi Kutusu

Gerçek sayılar kümesi üzerinde toplama işleminin kapalılık özelliği vardır. Yani $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b \in \mathbb{R}$ dir.

Örnek

$3\sqrt{2} + (-5\sqrt{2})$ ve $(-5\sqrt{2}) + 3\sqrt{2}$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$3\sqrt{2} + (-5\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$ ve $(-5\sqrt{2}) + 3\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları birbirine eşittir.

Bilgi Kutusu

Gerçek sayılar kümesi üzerinde toplama işleminin değişme özelliği vardır. Yani $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$ için $a + b = b + a$ tir.

Örnek

$\sqrt{2} + (3\sqrt{2} + 2\sqrt{2})$ ve $(\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$\sqrt{2} + (3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ ve

$(\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları birbirine eşittir.

Bilgi Kutusu

Gerçek sayılar kümesi üzerinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır. Yani $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{R}$ için

$a + (b + c) = (a + b) + c$ tir.

Örnek

$\frac{1}{2} + 0$ ve $0 + \frac{1}{2}$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$ ve $0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları birbirine eşittir.

Bilgi Kutusu

$\forall a \in \mathbb{R}$ için $a + 0 = 0 + a = a$ olduğundan gerçek sayılar kümesinde toplama işleminin etkisiz elemanı 0 dır.

Örnek

$\sqrt{7} + (-\sqrt{7})$ ve $(-\sqrt{7}) + \sqrt{7}$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$\sqrt{7} + (-\sqrt{7}) = 0$ ve $(-\sqrt{7}) + \sqrt{7} = 0$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları 0 dır.

Bilgi Kutusu

$\forall a \in \mathbb{R}$ için $a + (-a) = (-a) + a = 0$ dır. O hâlde a gerçek sayısının toplama işlemine göre tersi $(-a)$ sayısıdır.

Sıra Sizde

Aşağıdaki eşitliklerde x, y, z, t sayılarını bulunuz.

a) $2\sqrt{2} + \sqrt{5} = x + 2\sqrt{2}$

b) $3 + \left[\sqrt{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = (3 + y) + \left(-\frac{1}{3}\right)$

c) $\frac{1}{3} + z = 0$

ç) $3\sqrt{5} + t = 3\sqrt{5}$

Gerçek Sayılar Kümesinde Çarpma İşleminin Özellikleri

Örnek

Aşağıda verilen işlemleri yapalım. Bulduğumuz sonuçların hangi sayı kümesine ait olduğunu söyleyelim.

a) $2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$ **b)** $5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ **c)** $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$ **ç)** $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-4\sqrt{2})$

Çözüm

a) $2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$ olur.

b) $5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{6}$ olur.

c) $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{15}$ olur.

ç) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-4\sqrt{2}) = -4$ olur.

a, b, c ve ç maddelerinde yaptığımız işlemlerin sonuçları gerçek sayılar kümesine aittir.

Bilgi Kutusu

Gerçek sayılar kümesi üzerinde çarpma işleminin kapalılık özelliği vardır. Yani $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$ için $a \cdot b \in \mathbb{R}$ dir.

Örnek

$\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{5}$ ve $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{7}$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{35}$ ve $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{7}=\frac{3}{35}$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları birbirine eşittir.

Bilgi Kutusu

Gerçek sayılar kümesi üzerinde çarpma işleminin değişme özelliği vardır. Yani $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$ için $a\cdot b = b\cdot a$ tir.

Örnek

$(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})\cdot\sqrt{5}$ ve $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5})$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})\cdot\sqrt{5}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{30}$ ve $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5})=\sqrt{2}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{30}$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları birbirine eşittir.

Bilgi Kutusu

Gerçek sayılar kümesi üzerinde çarpma işleminin birleşme özelliği vardır. Yani $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{R}$ için $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ tir.

Örnek

$1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$ ve $\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 1$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$ ve $\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 1=-\frac{1}{3}$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları birbirine eşittir.

Bilgi Kutusu

$\forall a \in \mathbb{R}$ için $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$ olduğundan gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin etkisiz elemanı 1 dir.

Örnek

$2\sqrt{3}\cdot 0$ ve $0\cdot 2\sqrt{3}$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$2\sqrt{3}\cdot 0 = 0$ ve $0\cdot 2\sqrt{3} = 0$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları 0 dır.

Bilgi Kutusu

$\forall a \in \mathbb{R}$ için $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$ olduğundan gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin yutan elemanı 0 dır.

Örnek

$\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}$ ve $\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2} = 1$ ve $\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5} = 1$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları birbirine eşittir.

! Gerçek sayılar kümesinde 0 ın çarpma işlemine göre tersi yoktur.

Bilgi Kutusu

$a \neq 0$ olmak üzere $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ için $a\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a}\cdot a = 1$ tir. O hâlde a gerçek sayısının çarpma işlemine göre tersi $\frac{1}{a}$ sayısıdır.

Örnek

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)$ ve $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{10}$ ve $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{10}+\frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

olduğundan $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}$ olur.

Sıra Sizde

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{5}$ ve $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$ işlemlerini yapıp sonuçlarını karşılaştırınız.

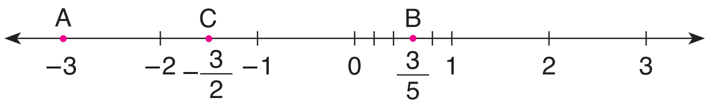
Bilgi Kutusu

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$ ve $(b + c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$ olduğundan gerçek sayılar kümesi üzerinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

Örnek

A(−3), $B\left(\frac{3}{5}\right)$ ve $C\left(-\frac{3}{2}\right)$ sayılarını sayı doğrusunda gösterelim.

Çözüm



Bilgi Kutusu

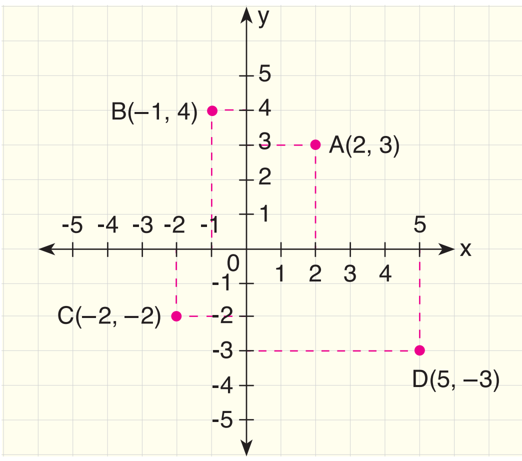
Gerçek sayılar, sayı doğrusunda gösterildiğinde sayı doğrusundaki her bir nokta tek bir gerçek sayıyı temsil eder ve gerçek sayılar kümesinin her elemanına sayı doğrusunda tek bir nokta karşılık gelir. Yani sayı doğrusu gerçek sayılar kümesinin geometrik temsilidir.

! Gerçek sayılar kümesi sayı doğrusunu tam olarak doldurur.

Örnek

A(2, 3), B(−1, 4), C(−2, −2) ve D(5, −3) noktalarını koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm



! İki sayı doğrusunun 0 (sıfır) noktasında dik kesişmesi ile koordinat sistemi elde edilir.

Bilgi Kutusu

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere koordinat sistemindeki her bir nokta (x, y) sıralı ikilisini temsil eder ve her (x, y) sıralı ikilisi koordinat sisteminde bir noktaya karşılık gelir. Yani koordinat sistemi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nin geometrik temsilidir.

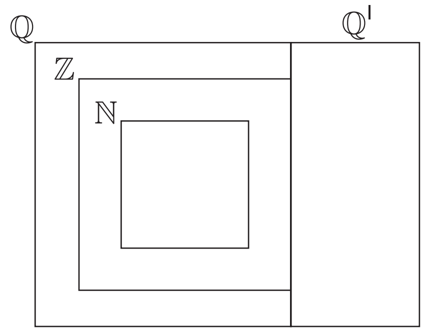
1. $\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi,

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi,

$\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar kümesi,

$\mathbb{Q}'$: İrrasyonel sayılar kümesi

olmak üzere aşağıda verilen sayıları yandaki kümelerin içine yerleştiriniz.



• $\sqrt{3}$	• 4,333...	• $\frac{1}{7}$	• 4,35792134...	• -1	• $-\sqrt{13}$	• π
• $-\frac{1}{3}$	• $\sqrt{36}$	• 2,9	• $2,6\overline{7}$	• 4	• -23	• 0

2. I. $\frac{1}{3}$ sayısının gerçek sayılar kümesinde çarpma işlemine göre tersi 3 tür.

II. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ tir.

III. Gerçek sayılar kümesinde toplama işleminin etkisiz elemanı 1 dir.

IV. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$ tir.

V. Gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin yutan elemanı 0 dır.

Yukarıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

3. $\sqrt{5}$ sayısını sayı doğrusunda gösteriniz.

4. Aşağıdaki sayıların çarpma işlemine göre tersini noktalı yerlere yazınız.

• $-\frac{7}{3} \rightarrow$ .... • $\frac{11}{7} \rightarrow$ .... • $3 \rightarrow$ ....

• $0,7 \rightarrow$ .... • $\sqrt{5} \rightarrow$ .... • $1,\overline{3} \rightarrow$ ....

5. x ve y birer tam sayı olmak üzere $(x-2)\cdot\sqrt{3} + (y+4)\cdot\sqrt{7}$ işleminin sonucu bir rasyonel sayıdır.

Buna göre x + y ifadesinin değerini bulunuz.

6. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}', \mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$ sembolleri ile gösterilen her bir sayı kümesi için birer eleman yazınız.

9.3.2. BÖLÜNEBİLME KURALLARI

Bir sepet fındığımız vardır. Bu fındıkları her biri 2 fındıktan oluşan gruplara bölünce 1 fındık artıyor. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ve 10 fındıktan oluşan gruplara bölünce de sırasıyla 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9 fındık artıyor.

❉ Bu sepette en az kaç fındık vardır?

Sembol ve Gösterimler

EKOK
EBOB

9.3.2.1. Tam Sayılarda Bölünebilme Kuralları

» Öyle bir sayı söyleyin ki 2, 3, 4, 5, 9 ve 10 ile kalansız bölünebilsin?

Örnek

$$\begin{array}{r|l} x & 44 \\ - & 7 \\ \hline y^2 & \end{array}$$

Yandaki bölme işleminde x ve y birer pozitif tam sayı olduğuna göre x yerine gelebilecek en büyük sayıyı bulalım.

Çözüm

$x = 44 \cdot 7 + y^2$ ve $0 \leq y^2 < 44$ tür. x in en büyük olması için y yi en büyük seçmeliyiz. $0 \leq y^2 < 44$ eşitsizliğini sağlayan en büyük y değeri 6 dır.

$x = 44 \cdot 7 + y^2 \Rightarrow x = 44 \cdot 7 + 6^2 \Rightarrow x = 308 + 36 \Rightarrow x = 344$ bulunur.

!

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ - & C \\ \hline K & \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işleminde

A → bölünen

B → bölen

C → bölüm

K → kalan

dır.

Bilgi Kutusu

2 ile Bölünebilme

❖ Birler basamağı çift olan tam sayılar 2 ile kalansız bölünür.

❖ Tek sayıların 2 ile bölümünden kalan 1 dir.

!

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ - & C \\ \hline K & \end{array}$$

A, B, C, K birer tam sayı ve $B \neq 0$ olmak üzere $A = B \cdot C + K$ ve $0 \leq K < B$ dir. K = 0 ise A sayısı B sayısına kalansız bölünür.

Örnek

173a sayısının 2 ile kalansız bölünmesi için a nın alabileceği değerlerin toplamını bulalım.

Çözüm

173a sayısının 2 ile kalansız bölünmesi için a sayısı 0, 2, 4, 6, 8 olmalıdır.

O hâlde a nın alabileceği değerlerin toplamı 0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20 olur.

Bilgi Kutusu

3 ile Bölünebilme

- Bir tam sayının rakamları toplamı 3 ün katı ise bu sayı 3 ile kalansız bölünür.
- Bir tam sayının 3 ile bölümünden kalan, bu sayının rakamları toplamının 3 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek

Beş basamaklı 7a321 sayısının 3 ile kalansız bölünmesi için a nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

7a321 sayısının 3 ile kalansız bölünmesi için rakamları toplamının 3 ün katı olması gerekir. Bu durumda 7 + a + 3 + 2 + 1 = 13 + a toplamının 3 ün katı olması için a nın alabileceği değerler 2, 5, 8 olmalıdır.

Örnek

On beş basamaklı 222...2 sayısının 3 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm

On beş basamaklı 222...2 sayısının rakamları toplamı

$$\underbrace{2 + 2 + 2 + \ldots + 2}_{15 \text{ tane}} = 15 \cdot 2 = 30 \text{ olur.}$$

30 un 3 ile bölümünden kalan 0 dır. Bu nedenle on beş basamaklı 222.....2 sayısının 3 ile bölümünden kalan 0 olur.

Sıra Sizde

Beş basamaklı 29a8b sayısı 3 ile kalansız bölünüyor. a + b nin alabileceği en büyük değer kaçtır?

Bilgi Kutusu

4 ile Bölünebilme

- Bir tam sayının son iki basamağını oluşturan sayı 4 ün katı ise bu sayı 4 ile kalansız bölünür.
- Bir tam sayının 4 ile bölümünden kalan, bu sayının son iki basamağındaki sayının 4 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek

Dört basamaklı 79a4 sayısının 4 ile kalansız bölünmesi için a nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

79a4 sayısının 4 ile kalansız bölünmesi için sayının son iki basamağını oluşturan a4 sayısının 4 ile kalansız bölünmesi gerekir. O hâlde a nın alabileceği değerler 0, 2, 4, 6 ve 8 dir.

Örnek

Beş basamaklı 2753a sayısının 4 ile bölümünden kalan 3 ise a nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

2753a sayısının 4 ile bölümünden kalan 3 ise 3a sayısının 4 ile bölümünden kalan 3 tür. O hâlde a nın alabileceği değerler 1, 5 ve 9 olur.

Sıra Sizde

Rakamları farklı dört basamaklı 97a6 sayısının 4 ile kalansız bölünmesi için a nın alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

Bilgi Kutusu

5 ile Bölünebilme

- Bir tam sayının birler basamağındaki rakam 0 ya da 5 ise bu sayı 5 ile kalansız bölünür.
- Bir tam sayının 5 ile bölümünden kalan, bu sayının birler basamağındaki rakamın 5 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek

Dört basamaklı 2a6b sayısı 5 ve 3 ile kalansız bölünüyor. Buna göre a nın alabileceği değerlerin toplamını bulalım.

Çözüm

2a6b sayısı 5 ile kalansız bölünüyorsa b sayısı 0 ya da 5 tir.

b = 0 için 2a60 sayısı 3 ile kalansız bölünüyorsa 2 + a + 6 + 0 = 8 + a toplamı 3 ün katıdır. Buradan a sayısı 1, 4 ve 7 olur.

b = 5 için 2a65 sayısı 3 ile kalansız bölünüyorsa 2 + a + 6 + 5 = 13 + a toplamı 3 ün katıdır. Buradan a sayısı 2, 5 ve 8 olur.

a nın alabileceği değerlerin toplamı 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27 olur.

ÇOK BÖLÜNEN SAYI

0'dan 9'a kadar olan bütün rakamların yalnız birer kez kullanıldığı 10 rakamlı bir sayı, 1'den 10'a kadar tam olarak bölünüyor.

Bu koşulu sağlayan en küçük sayıyı bulunuz.

Sıra Sizde

Beş basamaklı 9763a sayısının 5 ile bölümünden kalan 3 ise a nın alabileceği değerlerin çarpımı kaçtır?

Bilgi Kutusu

8 ile Bölünebilme

- Bir tam sayının son üç basamağının oluşturduğu sayı 8 in katı ise bu sayı 8 ile kalansız bölünür.
- Bir tam sayının 8 ile bölümünden kalan, bu sayının son üç basamağındaki sayının 8 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek

Beş basamaklı 1920a sayısının 8 ile kalansız bölünmesi için a nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

1920a sayısının 8 ile kalansız bölünmesi için 20a sayısının 8 ile kalansız bölünmesi gerekir. O hâlde a sayısı 0 veya 8 olmalıdır.

Sıra Sizde

Rakamları birbirinden farklı beş basamaklı 328a6 sayısı 8 ile kalansız bölündüğüne göre a nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

Bilgi Kutusu

9 ile Bölünebilme

- Bir tam sayının rakamları toplamı 9 un katı ise bu sayı 9 ile kalansız bölünür.
- Bir tam sayının 9 ile bölümünde kalan, bu sayının rakamları toplamının 9 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek

2aa6 sayısının 9 ile kalansız bölünmesi için a nın alabileceği değeri bulalım.

Çözüm

2aa6 sayısının 9 ile kalansız bölünmesi için $2 + a + a + 6 = 8 + 2a$ toplamının 9 un katı olması gerekir. O hâlde $a = 5$ olmalıdır.

Örnek

Dört basamaklı 436a sayısının 9 ile bölümünden kalan 5 ise a nın alabileceği değeri bulalım.

Çözüm

436a sayısının 9 ile bölümünden kalan 5 ise
$4 + 3 + 6 + a = 13 + a = 9k + 5$, $k \in \mathbb{N}$ dir.
$13 + a = 9k + 5$ ise $8 + a = 9k$ olur. O hâlde a nın alabileceği değer 1 olur.

Sıra Sizde

$\underbrace{232323 \ldots 23}_{30 \text{ basamaklı}}$ sayısının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

Bilgi Kutusu

10 ile Bölünebilme

- Bir tam sayının birler basamağındaki rakam 0 ise bu sayı 10 ile kalansız bölünür.
- Bir tam sayının 10 ile bölümünden kalan, bu sayının birler basamağındaki rakama eşittir.

Örnek

Dört basamaklı 9a8b sayısının 10 ile bölümünden kalan 7 dir.
Bu sayı 9 ile kalansız bölündüğüne göre a + b nin alacağı değeri bulalım.

Çözüm

9a8b sayısının 10 ile bölümünden kalan 7 ise $b = 7$ olur. 9a87 sayısı 9 ile kalansız bölündüğünden $9 + a + 8 + 7 = 24 + a$ toplamı 9 un katı olduğundan $a = 3$ olur. Bu durumda $a + b = 3 + 7 = 10$ bulunur.

Bilgi Kutusu

11 ile Bölünebilme

- Bir tam sayının basamaklarında bulunan rakamların birler basamağından başlayarak ve birer basamak atlayarak sayı değerleri toplanır.
- Atlanan basamaklardaki rakamların sayı değerleri toplanır.
- 1. bulunan toplamdan 2. bulunan toplam çıkarılır. Elde edilen fark 11 in katı ise sayı 11 ile kalansız bölünür.

Örnek

1235742013 sayısının 11 ile kalansız bölünüp bölünmediğini bulalım.

Çözüm

1235742013 sayısı için,

(3 + 0 + 4 + 5 + 2) – (1 + 2 + 7 + 3 + 1) = 14 – 14 = 0 bulunur.

Bulduğumuz fark 11 in katı olduğu için verilen sayı 11 ile kalansız bölünür.

Örnek

Beş basamaklı 4a821 sayısının 11 ile kalansız bölünmesi için a nın alabileceği değeri bulalım.

Çözüm

4a821 sayısının 11 ile kalansız bölünmesi için

(1 + 8 + 4) – (a + 2) = 11 – a farkı 11 in katı olmalıdır. O hâlde a = 0 olur.

Sıra Sizde

1m630 sayısı 11 ile kalansız bölündüğüne göre m kaçtır?

! 1 sayısından başka ortak pozitif tam sayı böleni olmayan iki pozitif tam sayıya aralarında asal sayılar denir.

Bilgi Kutusu

a ile b aralarında asal sayılar olmak üzere a ve b sayılarına kalansız bölünebilen bir tam sayı a·b ye de kalansız bölünür.

! Ardışık pozitif tam sayılar aralarında asaldır.

! 1 ile tüm pozitif tam sayılar aralarında asaldır.

Örnek

Beş basamaklı 16a3b sayısı 6 ile kalansız bölünüyor.

Buna göre a + b nin alabileceği en büyük değeri bulalım.

Çözüm

6 = 2.3 olduğundan 6 ile kalansız bölünen bir sayı hem 2 hem de 3 ile kalansız bölünür. 16a3b sayısı 2 ile kalansız bölünüyor ise b nin alacağı değer 0, 2, 4, 6 ya da 8 dir.

a + b nin en büyük değerini bulabilmek için b = 8 alalım.

16a38 sayısı 3 ile kalansız bölündüğüne göre 1 + 6 + a + 3 + 8 = 18 + a toplamı 3 ün katı olmalıdır. Buradan a nın değeri 0, 3 , 6 , 9 bulunur.

a + b nin en büyük değeri b = 8 ve a = 9 için a + b = 9 + 8 = 17 olur.

Örnek

Beş basamaklı 93a3b sayısı 36 ile kalansız bölünüyor.

Buna göre a + b nin alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

$36 = 9 \cdot 4$ olduğundan 36 ile kalansız bölünen bir sayı hem 9 hem de 4 ile kalansız bölünür. 93a3b sayısı 4 ile kalansız bölündüğüne göre b nin değeri 2 ya da 6 dır.

b = 2 ise 93a32 sayısı 9 ile kalansız bölündüğünden
$9 + 3 + a + 3 + 2 = 17 + a$ toplamı 9 un katı olur.

Buradan a = 1 olup $a + b = 1 + 2 = 3$ olur.

b = 6 ise 93a36 sayısı 9 ile kalansız bölündüğüne göre
$9 + 3 + a + 3 + 6 = 21 + a$ toplamı 9 un katı olur. Buradan a = 6 olup
$a + b = 6 + 6 = 12$ olur. a + b nin alabileceği değerler 3 ve 12 dir.

Örnek

Beş basamaklı 4a93b sayısının 15 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre (a, b) ikilisinin kaç farklı değer alacağını bulalım.

Çözüm

Bir sayının 15 ile bölümünden kalan 2 ise $15 = 3 \cdot 5$ olduğundan bu sayının 5 ve 3 ile bölümünden kalan 2 dir.

4a93b sayısının 5 ile bölümünden kalan 2 ise b nin değeri 2 ya da 7 dir.

b = 2 ise 4a932 sayısının 3 ile bölümünden kalan 2 olduğundan
$4 + a + 9 + 3 + 2 = 18 + a = 3k + 2,\ k \in \mathbb{N}$ olur. O hâlde $16 + a = 3k$ olup a nın alacağı değer 2, 5 ya da 8 dir.

b = 7 ise 4a937 sayısının 3 ile bölümünden kalan 2 olduğundan
$4 + a + 9 + 3 + 7 = 23 + a = 3k + 2,\ k \in \mathbb{N}$ olur. O hâlde $21 + a = 3k$ olup a nın alacağı değer 0, 3, 6 ya da 9 dur.

Buna göre (a , b) ikilisinin (2 , 2), (5, 2), (8, 2), (0, 7), (3, 7), (6, 7) ve (9, 7) olacak şekilde 7 farklı değeri vardır.

Sıra Sizde

Dört basamaklı 2a7b sayısı 45 ile kalansız bölünüyor.

Buna göre a yerine kaç farklı sayı gelebilir?

1.
$$\begin{array}{r|l} a & b^2 \\ \cline{2-2} - & 6 \\ \hline 11 & \end{array}$$

Yandaki bölme işleminde a ve b birer pozitif tam sayı olduğuna göre a nın en küçük değeri kaçtır?

2.
$$\begin{array}{r|l} A & B+1 \\ \cline{2-2} - & 3 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} B & C-1 \\ \cline{2-2} - & 3 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Yandaki bölme işlemlerine göre A nın C türünden değerini bulunuz.

3. 25ab dört basamaklı sayısı, 9 ile kalansız bölünüyor.
Bu sayının 5 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre a nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

4. Beş basamaklı 3a25b sayısı 12 ile bölündüğüne göre a nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

5. Aşağıdaki tabloda I. sütunda verilen ifadelerin doğru olabilmesi için a nın alabileceği değerler II. sütunda karışık olarak verilmiştir. Doğru eşleştirmeleri yapınız.

I.
2a51 sayısı 3 ile kalansız bölünmektedir.
43a8 sayısı 11 ile kalansız bölünmektedir.
15a2 sayısı 4 ile kalansız bölünmektedir.
543a sayısı 6 ile kalansız bölünmektedir.
457a sayısının 5 ile bölümünden kalan 4 tür.

II.
{1, 3, 5, 7, 9}
{1, 4, 7}
{6}
{7}
{4, 9}
{0, 6}

6. Dört basamaklı 3a8b sayısının 4 ile bölümünden kalan 1 ve 3 ile bölümünden kalan 2 ise (a, b) ikililerinin kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

7. Dört basamaklı 2a7b sayısı 18 ile bölündüğüne göre a nın alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

8. Alptuğ, marketten birim fiyatı 11 TL olan bir üründen belli miktarda almıştır. Alptuğ yaptığı alışveriş için toplam 5a2 TL ödemiştir.
Alptuğ bu üründen toplam kaç adet satın almıştır?

9. Dört basamaklı 8m7n sayısının 30 ile bölümünden kalan 17 olduğuna göre m + n nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

10. Beş basamaklı 922ab sayısının 15 ile bölümünden kalan 8 olduğuna göre (a, b) ikilisinin kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

9.3.2.2. Tam Sayılarda EBOB ve EKOK

Bir şirkette iki farklı kilidi olan bir kasa bulunmaktadır. Kasanın şifreleri şirketin iki farklı çalışanındadır. Bir araya gelmeden kasayı açmaları mümkün değildir. Bu kişiler farklı ülkelere belirli aralıklarla iş seyahatine çıkıyorlar. Birisi 6 günde bir, diğeri 8 günde bir şirkete gelip tekrar ayrılıyorlar.

» Kasayı kaçar gün aralıklarla açabilirler?

Bilgi Kutusu

- En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla tam sayının pozitif ortak bölenlerinin en büyüğüne **bu sayıların en büyük ortak böleni** denir. a ve b sayılarının en büyük ortak böleni EBOB(a, b) biçiminde gösterilir.
- En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla tam sayının pozitif ortak katlarının en küçüğüne **bu sayıların en küçük ortak katı** denir. a ve b sayılarının en küçük ortak katı EKOK(a, b) biçiminde gösterilir.

Örnek

24, 32 ve 48 sayılarının en büyük ortak bölenini ve en küçük ortak katını asal çarpanlar algoritması yardımı ile bulalım.

Çözüm

24	32	48	2
12	16	24	2
6	8	12	2
3	4	6	2
3	2	3	2
3	1	3	3
1		1	

24, 32 ve 48 sayılarının en büyük ortak böleni EBOB (24, 32, 48) = $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ bulunur.

24, 32 ve 48 sayılarının en küçük ortak katı EKOK(24, 32, 48) = $2^5 \cdot 3 = 96$ bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki istenilen değerleri bulunuz.

a) EBOB(5, 15, 30) **b)** EKOK(13, 17)

c) EBOB(8, 9) **ç)** EKOK(25, 50, 75)

d) EBOB(40, 80, 120) **e)** EKOK(10, 11)

! a ve b aralarında asal iki pozitif tam sayı ise
EBOB(a, b) = 1
EKOK(a, b) = $a \cdot b$ olur.

Örnek

Tatil için ülkemize gelen 12 Alman, 24 Japon, 36 İngiliz turist bir otele yerleştirilecektir.

Her odada eşit sayıda ve aynı ülkeden turist kalması şartıyla en az kaç oda gerekeceğini bulalım.

Çözüm

Oda sayısının en az olması için her odada mümkün olduğu kadar fazla sayıda kişinin kalması gerekir. O hâlde 12, 24, 36 sayılarının en büyük ortak bölenini bulalım.

12	24	36	(2)
6	12	18	(2)
3	6	9	2
3	3	9	(3)
1	1	3	3
		1	

EBOB(12, 24, 36) = $2^2 \cdot 3$ = 12 olur. Yani bir odada en fazla 12 kişi kalmalıdır.

Bu durumda oda sayısı $\frac{12 + 24 + 36}{12} = 6$ olur.

Örnek

Üç zil 20, 30, 60 dakikalık aralıklarla çalıyor. Saat 08.30 da bu üç zil birlikte çalıyor.

Buna göre tekrar birlikte çaldıklarında saatin kaç olacağını bulalım.

> ! Birbirlerinin katları olan tam sayıların EBOB u bu sayılardan küçük olana, EKOK u ise büyük olana eşittir.

Çözüm

20, 30 ve 60 ın en küçük ortak katı, üç zilin kaç dakikada bir birlikte çaldıklarını verir. Birbirlerinin katları olan tam sayıların EKOK u bu sayılardan büyük olana eşit olduğundan EKOK(20, 30, 60) = 60 olur.

Bu durumda saat 08.30 da bu üç zil çaldıktan 60 dakika sonra 09.30 da tekrar birlikte çalacaklardır.

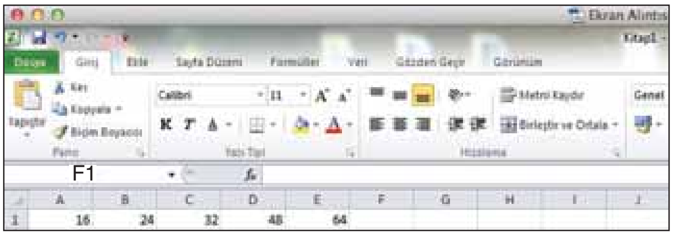
Örnek

Bir mağazada çalışan Taner Bey 16 m, 24 m, 32 m, 48 m ve 64 m uzunluğundaki beş parça kumaşı eşit büyüklükte en büyük parçalara ayırmak istiyor.

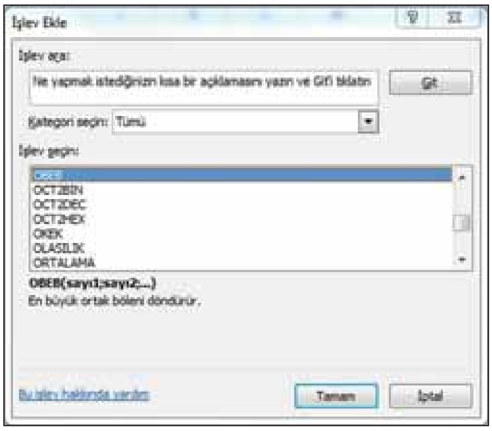
Taner Bey'in kumaşları kaç metre uzunluğunda parçalara ayıracağını bir elektronik tablolama programı yardımıyla hesaplayalım.

Çözüm

Kumaşlar eşit büyüklükte en büyük parçalara bölüneceğinden verilen sayıların EBOB unu bulmalıyız. Excel programı açıldıktan sonra 16, 24, 32, 48 ve 64 sayılarını aşağıdaki gibi yazalım.

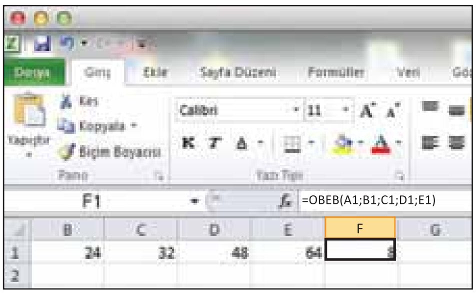


F1 kutusuna tıkladıktan sonra *fx* tuşuna tıklayalım. Aşağıdaki gibi açılan pencerede "OBEB" sekmesini seçerek "Tamam" butonuna tıklayalım.



Yeni açılan pencerede sayı1 bölümüne A1, sayı2 bölümüne B1, sayı3 bölümüne C1, sayı4 bölümüne D1, sayı5 bölümüne E1 yazarak "Tamam" tuşuna basalım.

F1 kutusundaki sayı 16, 24, 32, 48 ve 64 sayılarının EBOB udur.



O hâlde OBEB (16, 24, 32, 48, 64) = 8 olduğundan Taner Bey kumaşları 8 m uzunluğunda parçalara ayırmalıdır.

Sıra Sizde

16, 24, 32, 48 ve 64 sayılarının EKOK unu Excel programı yardımıyla hesaplayınız.

Örnek

30 ve x sayılarının EBOB u 10, EKOK u 120 olduğuna göre x sayısını bulalım.

Çözüm

30 ve x sayma sayılarının çarpımı bu sayıların EBOB u ile EKOK unun çarpımına eşittir. O hâlde $30 \cdot x = \text{EBOB}(30, x) \cdot \text{EKOK}(30, x)$ olur.

Buradan $30 \cdot x = 10 \cdot 120 \Rightarrow x = 40$ bulunur.

! a, b pozitif tam sayıları için $a \cdot b = \text{EBOB}(a, b) \cdot \text{EKOK}(a, b)$ dir.

Örnek

Bir torbadaki bilyeler üçerli, dörderli ve beşerli gruplandığında her seferinde 2 bilye artmaktadır.

Torbadaki bilye sayısının en az kaç tane olabileceğini bulalım.

Çözüm

Bilyeler üçerli, dörderli ve beşerli gruplandığında her seferinde 2 bilye artıyor ise, bilyelerin sayısı 3, 4 ve 5 in en küçük ortak katı olan sayının 2 fazlasıdır.

$\text{OKEK}(3, 4, 5) = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ olup bilye sayısı en az $60 + 2 = 62$ olur.

Örnek

Boyutları 24 metre ve 72 metre olan dikdörtgen şeklindeki bir tarlanın etrafındaki her köşeye bir ağaç gelecek şekilde eşit aralıklarla ağaçlar dikilecektir.

Bunun için en az kaç ağaç gerekeceğini bulalım.

Çözüm

$\text{EBOB}(24, 72) = 24$ olduğundan 24 m aralıklarla ağaç dikilmelidir.

Tarlanın çevresi $2 \cdot (24 + 72) = 192$ m olduğundan en az $192 : 24 = 8$ ağaç dikilir.

1. 400 sayısından en az hangi sayı çıkartılmalıdır ki kalan sayı 3, 5 ve 9 ile tam bölünebilsin?

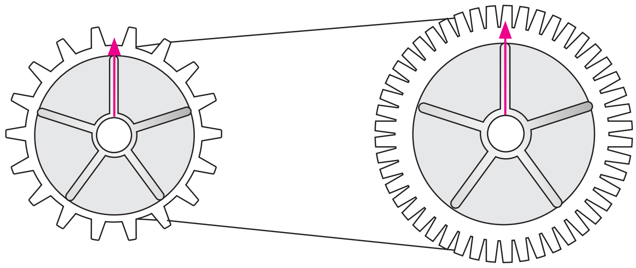
2. EKOK(A, B) + EBOB(A, B) = 80 ve 3A = 5B olduğuna göre A + B kaçtır?

3. a, b sayıları aralarında asal pozitif tam sayılardır.

   $\frac{30}{a} + b = 18$ ve EKOK(a, b) = 150 olduğuna göre a sayısını bulunuz.

4. Mehmet'in bisikletinin ön dişlisinin 48, arka dişlisinin 18 dişi vardır.

   Yandaki konumda iken hareket eden dişlilerin tekrar aynı konuma gelmeleri için en az kaç tur dönmeleri gerekmektedir?



5. 350 ve 450 sayılarını tam bölen en büyük doğal sayı kaçtır?

6. a, b, c sayıları doğal sayı olmak üzere K = 3a + 2 = 5b + 2 = 7c + 2 olduğuna göre K nin en küçük değerini bulunuz.

7. Bir hastanede çalışan Melek, Nurşen ve Nevin sırası ile 3, 4 ve 5 günde bir nöbet tutmaktadır.

   Bu üç kişi birlikte nöbete başladıktan kaç gün sonra 3. kez birlikte tekrar nöbet tutacaklardır?

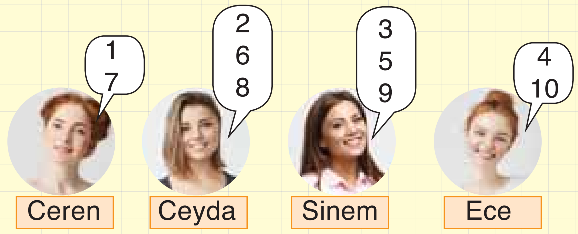
8. Boyutları 6 cm, 8 cm ve 12 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki tuğlalar kullanılarak bir küp yapılmak isteniyor.

   Bunun için en az kaç tane tuğla gerekir?

9. Yusuf yapacağı dolap için kullanacağı rafları hazırlayacaktır.

   120 cm x 150 cm ebatındaki tahtadan parça artırmadan eşit büyüklükte en az kaç tane raf kesebilir?

9.3.2.3. Periyodik Olarak Tekrar Eden Problemler



Yan yana sıralanan Ceren, Ceyda, Sinem ve Ece sırasıyla ardışık sayılar söylüyorlar. Ceren 1 sayısı ile başlıyor ve sıra soldan sağa doğru, Ece'den sonra ise sağdan sola doğru devam ediyor.

» Bu şekilde devam edildiğinde 32 sayısını kim söyler?

Örnek

ALİALİALİ ... şeklinde oluşturulan harf dizisinin baştan 47. harfini bulalım.

Çözüm

3 farklı harf kullanılarak oluşturulan dizide her harf 3 harfte bir tekrar etmektedir. O hâlde 47 sayısını 3 e böldüğümüzde kalan 2 çıktığı için ALİ kelimesindeki 2. harf olan L harfi baştan 47. harf olur.

$$\begin{array}{r|l} 47 & 3 \\ \cline{2-2} -3 & 15 \\ \cline{1-1} 17 & \\ -15 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Örnek

Bugün günlerden perşembe olduğuna göre 107 gün sonra hangi gün olacağını bulalım.

Çözüm

1 hafta 7 gün olduğundan verilen gün sayısı 7 ye bölünür. Perşembe gününü 0 kabul ederek haftanın günlerini aşağıdaki gibi numaralandıralım.

Perşembe	Cuma	Cumartesi
0	1	2

$$\begin{array}{r|l} 107 & 7 \\ \cline{2-2} -7 & 15 \\ \cline{1-1} 37 & \\ -35 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Kalan 2 olduğundan 107 gün sonra cumartesi olur.

Örnek

Bir hemşire 4 günde bir nöbet tutmaktadır. İlk nöbetini pazartesi günü tuttuğuna göre 53. nöbetini hangi gün tutacağını bulalım.

Çözüm

Hemşire ilk nöbetini pazartesi günü tuttuğuna göre 52 nöbet daha tutacaktır. Her nöbet arası 4 gün olacağından 52·4 = 208 gün sonra 53. nöbetini tutacaktır. İlk nöbetini pazartesi tuttuğu için haftanın günlerinden pazartesiyi 0 kabul ederek aşağıdaki gibi numaralandıralım.

$$\begin{array}{r|l} 208 & 7 \\ \underline{-14} & 29 \\ 68 & \\ \underline{-63} & \\ 05 & \end{array}$$

Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi
0	1	2	3	4	5

208 sayısını 7 ye böldüğümüzde kalan 5 olduğundan 53. nöbetini cumartesi günü tutacaktır.

Sıra Sizde

Aşağıda bir hastanedeki doktorların ilk nöbet günleri ve kaç günde bir nöbet tutacakları verilmiştir.

Doktorların 38. nöbetlerini hangi gün tutacaklarını tabloda ilgili yere yazınız.

Doktorlar	İlk Nöbet günü	Kaç Günde Bir Nöbet Tutacakları	38. Nöbet Günü
Elif	Pazar	5	
Mehmet	Çarşamba	4	
Nur	Salı	6	
Poyraz	Cuma	3	

Örnek

İrem, Elif ve Sinem sırasıyla 4, 6 ve 8 günde bir piyano kursuna gitmektedir.

3. kez üçü birlikte cumartesi günü gittiklerine göre 7. kez birlikte hangi gün piyano kursuna gideceklerini bulalım.

Çözüm

EKOK(4, 6, 8) = 24 olduğundan İrem, Elif ve Sinem 24 günde bir birlikte piyano kursuna gitmektedir. Birlikte 7 – 3 = 4 kez daha piyano kursuna gideceklerdir. Bunun için geçen süre 24·4 = 96 gün olacaktır. Cumartesi gününü 0 kabul ederek haftanın günlerini aşağıdaki gibi numaralandıralım.

$$\begin{array}{r|l} 96 & 7 \\ \underline{-7} & 13 \\ 26 & \\ \underline{-21} & \\ 5 & \end{array}$$

Cumartesi	Pazar	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe
0	1	2	3	4	5

96 sayısını 7 ye böldüğümüzde 5 olduğundan 7. kez birlikte piyano kursuna perşembe günü gideceklerdir.

1. Bugün günlerden pazar olduğuna göre 243 sonra hangi gündür?

2. Bir trafik lambasında sırasıyla 60 saniye kırmızı, 10 saniye sarı ve 50 saniye de yeşil ışık yanmaktadır.

   Buna göre kırmızı ışığın yandığı andan itibaren 60 dakika sonra hangi ışık yanar?

3. SAYGISAYGISAYGI ... şeklinde devam eden bir harf dizisinin 350. harfi hangisidir?

4. 3 ayda bir sefere çıkan bir gemi ilk seferine kasım ayında çıkarsa 17. seferine hangi ay çıkar?

5. Bir hastanın tedavisi için alması gereken ilaçlar ve zamanlar aşağıdaki gibidir.
   - X ilacını 3 günde bir alacaktır.
   - Y ilacını 4 günde bir alacaktır.
   - Z ilacını X ve Y ilaçlarını birlikte aldığı günlerde alacaktır.

   Hasta X, Y ve Z ilacını birlikte ilk kez cuma günü alıyor.

   Buna göre 20. defa üç ilacı birlikte aldığında Y ilacından kaç kez almış olur?

6. Gökhan 4 günde bir Ezgi ise 5 günde bir kütüphaneye gitmektedir.

   Gökhan ve Ezgi ilk kez cumartesi günü birlikte kütüphaneye gittiklerine göre 15. kez kütüphaneye hangi gün birlikte giderler?

7. Uğur diş tedavisi için 10 günde bir diş hastanesine kontrole gidecektir. Uğur ilk kez diş hastanesine salı günü gitmiştir.

   Buna göre 9. kontrolüne hangi gün gideceğini bulunuz.

9.3.3. BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Dikdörtgen şeklindeki bir arazinin kısa kenarının uzunluğu 10 metredir. Bu arazinin çevresinin en az 80 metre ve en fazla 120 metre aralığında olduğu biliniyor.

- Arazinin uzun kenarının uzunluğu hangi aralıktadır?

9.3.3.1. Gerçek Sayılar Kümesinde Aralık Kavramı

$A = \{x \mid -2 < x < 5,\ x \in \mathbb{R}\}$

$B = \{x \mid -2 \leq x \leq 5,\ x \in \mathbb{R}\}$

$C = \{x \mid -2 \leq x < 5,\ x \in \mathbb{R}\}$

$D = \{x \mid -2 < x \leq 5,\ x \in \mathbb{R}\}$

» A, B, C ve D kümelerinin elemanları liste yöntemi ile yazılabilir mi?

» –2 ve 5 gerçek sayıları A, B, C ve D kümelerine ait midir?

Bilgi Kutusu

- Sayı doğrusu üzerinde birbirinden farklı iki noktanın arasındaki tüm gerçek sayılardan oluşan alt kümeye **aralık** denir.
- Aralıklar verilen kümeye uç noktaların dahil edilip edilmemesine bağlı olarak isimlendirilirler. [a, b), (a, b], [a, b] ve (a, b) gösterimlerindeki a ve b gerçek sayıları birer uç noktadır.

Sembol ve Gösterimler

$<$

$\leq$

$>$

$\geq$

[a, b]

(a, b]

[a, b)

(a, b)

$(-\infty, \infty)$

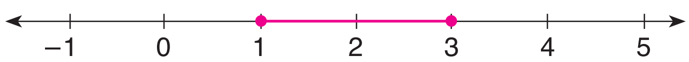
$|x|$

Örnek

$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3,\ x \in \mathbb{R}\}$ kümesini sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

Çözüm

$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3,\ x \in \mathbb{R}\}$ kümesi 1 ile 3 arasındaki (1 ve 3 dahil) tüm gerçek sayılara karşılık gelen noktaların oluşturduğu doğru parçasıdır. Bu aralık sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir.



Bilgi Kutusu

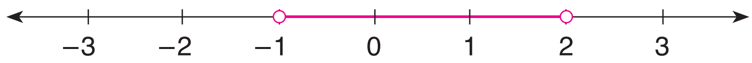
$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere $\{x \mid a \le x \le b, x \in \mathbb{R}\}$ kümesine **kapalı aralık** denir ve $[a, b]$ biçiminde gösterilir.

Örnek

$A = \{x \mid -1 < x < 2, x \in \mathbb{R}\}$ kümesini sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

Çözüm

$A = \{x \mid -1 < x < 2, x \in \mathbb{R}\}$ kümesi -1 ile 2 sayıları arasındaki (-1 ve 2 hariç) tüm gerçek sayılara karşılık gelen noktaların oluşturduğu doğru parçasıdır. Bu aralık sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir.



Bilgi Kutusu

$a, b \in R$ ve $a < b$ olmak üzere $\{x \mid a < x < b, x \in R\}$ kümesine **açık aralık** denir ve (a, b) biçiminde gösterilir.

Örnek

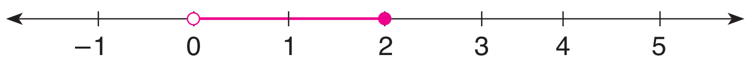
Aşağıdaki kümeleri sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

a) $A = \{x \mid 0 < x \le 2, x \in \mathbb{R}\}$

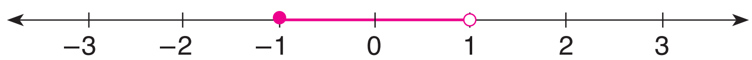
b) $B = \{x \mid -1 \le x < 1, x \in \mathbb{R}\}$

Çözüm

a) $A = \{x \mid 0 < x \le 2, x \in \mathbb{R}\}$ kümesi 0 ile 2 arasındaki (0 hariç, 2 dahil) tüm gerçek sayılara karşılık gelen noktaların oluşturduğu doğru parçasıdır. Bu aralık sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir.



b) $B = \{x \mid -1 \le x < 1, x \in \mathbb{R}\}$ kümesi -1 ile 1 arasındaki (-1 dahil, 1 hariç) tüm gerçek sayılara karşılık gelen noktaların oluşturduğu doğru parçasıdır. Bu aralık sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir.



Bilgi Kutusu

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere $\{x \mid a \leq x < b, x \in \mathbb{R}\}$ ve $\{x \mid a < x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$ kümesine **yarı açık aralık** denir ve sırasıyla $[a, b)$ ve $(a, b]$ biçiminde gösterilir.

Sıra Sizde

Aşağıdaki kümelere karşılık gelen aralıkları yazıp sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a) $A = \{x \mid x < 7, x \in \mathbb{R}\}$ **b)** $B = \{x \mid x \leq -2, x \in \mathbb{R}\}$

c) $C = \{x \mid x > -4, x \in \mathbb{R}\}$ **ç)** $D = \{x \mid x \geq 1, x \in \mathbb{R}\}$

Bilgi Kutusu

Uç noktalarından birinin ya da ikisinin sınırlandırılmadığı aralıklar $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, a)$ $(-\infty, a]$, $(-\infty, \infty)$ şeklinde gösterilir.

Örnek

$A = (-2, 5)$ ve $B = [3, \infty)$ aralıkları veriliyor.

Buna göre aşağıda istenen kümeleri bulalım.

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$

c) $A - B$ **ç)** $B - A$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B$

Çözüm

a) $A \cup B = (-2, 5) \cup [3, \infty) = \{x \mid -2 < x < 5 \vee 3 \leq x < \infty, x \in \mathbb{R}\}$

$= \{x \mid -2 < x < \infty, x \in \mathbb{R}\}$

$= (-2, \infty)$ olur.

b) $A \cap B = (-2, 5) \cap [3, \infty) = \{x \mid -2 < x < 5 \wedge 3 \leq x < \infty, x \in \mathbb{R}\}$

$= \{x \mid 3 \leq x < 5, x \in \mathbb{R}\}$

$= [3, 5)$ olur.

c) $A - B = A \cap B' = \{x \mid -2 < x < 5 \wedge x < 3, x \in \mathbb{R}\}$

$= \{x \mid -2 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$

$= (-2, 3)$ olur.

ç) $B - A = B \cap A' = \{x \mid 3 \leq x < \infty \wedge (-\infty < x \leq -2 \vee 5 \leq x < \infty), x \in \mathbb{R}\}$

$= \{x \mid 5 \leq x < \infty, x \in \mathbb{R}\}$

$= [5, \infty)$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen aralıkları sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a. $(3, 6]$ **b)** $(-4, 3)$ **c)** $[-5, -1)$ **ç)** $[3, 4]$

2. $A = (-7, 5)$ ve $B = [3, \infty)$ olmak üzere $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, A', B' kümelerini bularak sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

3. $A = \{x \mid x < -3, x \in \mathbb{R}\}$ ve $B = \{x \mid x \geq 2, x \in \mathbb{R}\}$ kümelerine karşılık gelen aralıkları yazıp sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

4. Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri örnekten yararlanarak doldurunuz.

Sözel ifade	Eşitsizlik ile Gösterimi	Aralık ile Gösterimi
Bugün hava sıcaklığı en az 15, en fazla 21 derece olacak.	$15 \leq x \leq 21$	[15, 21]
Sınavda başarılı olabilmek için 100 üzerinden en az 45 almak gerekiyor.		
Araç yolculuk boyunca en fazla 120 km/sa. hız yaptı.		
Topraktaki suyun pH değeri 6 ile 8,5 arasında değişir.		
Bebekler için ideal oda sıcaklığı 20 ile 24 derece arasındadır.		

5. $A = \{x \mid x \geq 7, x \in \mathbb{R}\}$ kümesi için $\mathbb{R} \cap A$, $\mathbb{R} \cup A$ ve $\mathbb{R} - A$ kümelerini bularak sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

9.3.3.2. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizliklerin Çözüm Kümeleri

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

I. $3x + 10 = 1$

II. $2x + 3 = 2 \cdot (x - 2)$

III. $x - 5 = 2x - 5 - x$

» I, II ve III numaralı denklemleri sağlayan x değerlerinin kümesini bulabilir misiniz?

Bilgi Kutusu

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b = 0$ şeklinde ifade edilebilen denklemlere **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler** denir.

$ax + b = 0$ denklemini sağlayan x değerlerine **denklemin kökü** denir. $ax + b = 0$ denkleminde

✓ $a \neq 0$ ise çözüm kümesi $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$

✓ $a = 0$ ve $b = 0$ ise çözüm kümesi $\mathbb{R}$

✓ $a = 0$ ve $b \neq 0$ ise çözüm kümesi $\varnothing$

şeklinde olur.

! $ax + b = 0$ denklemini sağlayan x değerlerinin kümesine denklemin çözüm kümesi denir.

Örnek

$2 \cdot (x - 6) = 14$ denkleminin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulalım.

Çözüm

$2 \cdot (x - 6) = 14 \Rightarrow 2x - 12 = 14 \Rightarrow 2x = 14 + 12 \Rightarrow 2x = 26 \Rightarrow x = 13$ olup denklemin çözüm kümesi {13} tür.

! Bir denklemde eşitliğin her iki tarafına aynı sayı eklenirse veya her iki tarafından aynı sayı çıkarılırsa eşitlik bozulmaz.

Örnek

$\frac{x+1}{2x-2} = \frac{3}{2}$ denkleminin çözüm kümesini tam sayılar ve gerçek sayılar kümelerinde bulalım.

Çözüm

$\frac{x+1}{2x-2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \cdot (x + 1) = 3 \cdot (2x - 2) \Rightarrow 2x + 2 = 6x - 6$

$\Rightarrow 2x - 6x = -6 - 2 \Rightarrow -4x = -8 \Rightarrow x = 2$ olur.

$2 \in \mathbb{Z}$ ve $2 \in \mathbb{R}$ olduğundan denklemin tam sayılar ve gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi {2} dir.

> ❗ Bir denklemde eşitliğin her iki tarafı sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılırsa eşitlik bozulmaz.

Örnek

$3 \cdot (5x - 3) = 2 \cdot (3x + 1) + 6$ denkleminin çözüm kümesini tam sayılar ve gerçek sayılar kümelerinde bulalım.

Çözüm

$3 \cdot (5x - 3) = 2 \cdot (3x + 1) + 6 \Rightarrow 15x - 9 = 6x + 2 + 6$

$\Rightarrow 15x - 9 = 6x + 8 \Rightarrow 15x - 6x = 9 + 8$

$\Rightarrow 9x = 17 \Rightarrow x = \frac{17}{9}$ bulunur.

$\frac{17}{9} \in \mathbb{R}$ olduğundan denklemin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi $\left\{\frac{17}{9}\right\}$, $\frac{17}{9} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan denklemin tam sayılar kümesindeki çözüm kümesi { } dir.

> ❗ Bir denklemde eşitliğin her iki tarafı sıfırdan farklı bir sayıya bölünürse eşitlik bozulmaz.

Örnek

$\frac{x-1}{3} + \frac{2x}{5} = \frac{1}{15}$ denkleminin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulalım.

Çözüm

$\underset{(5)}{\frac{x-1}{3}} + \underset{(3)}{\frac{2x}{5}} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{5x-5}{15} + \frac{6x}{15} = \frac{1}{15} \Rightarrow 5x - 5 + 6x = 1$

$\Rightarrow 11x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{11}$ bulunur.

$\frac{6}{11} \in \mathbb{R}$ olduğundan denklemin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi $\left\{\frac{6}{11}\right\}$ dir.

Örnek

$2a + (a - 2)x + 3 = 5 - x$ denkleminin çözüm kümesi {2} olduğuna göre a sayısını bulalım.

Çözüm

Verilen denklemin çözüm kümesi {2} olduğundan, denklemde x yerine 2 yazalım.

$2a + (a - 2)\,x + 3 = 5 - x \Rightarrow 2a + (a - 2) \cdot 2 + 3 = 5 - 2$

$\Rightarrow 2a + 2a - 4 + 3 = 3$

$\Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$ bulunur.

Örnek

$2\cdot(x-2)+x+3=3\cdot(x+2)+12$ denkleminin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulalım.

Çözüm

$$2\cdot(x-2)+x+3=3\cdot(x+2)+12 \Rightarrow 2x-4+x+3=3x+6+12$$
$$\Rightarrow 3x-1=3x+18$$
$$\Rightarrow 3x-3x=18+1 \Rightarrow 0=19$$

olduğundan denklemin çözüm kümesi { } dir.

Örnek

$4\cdot(x+1)+2x=3\cdot(2x+1)+1$ denkleminin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulalım.

Çözüm

$$4\cdot(x+1)+2x=3\cdot(2x+1)+1 \Rightarrow 4x+4+2x=6x+3+1$$
$$\Rightarrow 6x+4=6x+4 \Rightarrow 0=0$$

olduğundan denklemin çözüm kümesi $\mathbb{R}$ dir.

Örnek

$a\cdot(x-1)=2x+3a+1$ denkleminde a nın hangi değeri için x değerinin bulunamayacağını bulalım.

Çözüm

$$a\cdot(x-1)=2x+3a+1 \Rightarrow a\cdot x-a=2x+3a+1$$
$$\Rightarrow a\cdot x-2\cdot x=a+3a+1$$
$$\Rightarrow x\cdot(a-2)=4a+1 \Rightarrow x=\frac{4a+1}{a-2} \text{ bulunur.}$$

$a-2=0 \Rightarrow a=2$ için x değeri bulunamaz.

> **!** $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\frac{a}{0}$ ifadesi tanımsızdır.

Örnek

$2ax-4=6x-b$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi $\mathbb{R}$ ise $a\cdot b$ değerini bulalım.

Çözüm

$2a\cdot x-4=6x-b \Rightarrow 2ax-6x+b-4=0 \Rightarrow (2a-6)x+b-4=0$
ifadesinde $2a-6=0$ ve $b-4=0$ olmalıdır.

$2a-6=0 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$ ve $b-4=0 \Rightarrow b=4$ olur.

Buradan $a\cdot b=3\cdot 4=12$ bulunur.

> **!** $a, b \in \mathbb{R}$, $ax+b=0$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesi $\mathbb{R}$ ise $a=0$ ve $b=0$ tır.

! $a, b \in \mathbb{R}$, $ax + b = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi { } ise $a = 0$ tır.

Örnek

$(3m - 9)x - 6 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi { } olduğuna göre m değerini bulalım.

Çözüm

Verilen denklemin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi { } ise $(3m - 9)x - 6 = 0$ denkleminde $3m - 9 = 0$ olmalıdır.

$3m - 9 = 0 \Rightarrow 3m = 9 \Rightarrow m = 3$ bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $3(2x - 1) = 6x + 3$ **b)** $\dfrac{x+1}{3x-2} = \dfrac{1}{7}$

c) $\dfrac{x-1}{2} + 3\cdot(x - 1) = 3$ **ç)** $2\cdot(4x - 3) - 1 = -7 + 8x$

Birinci Dereden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

Bir mağazadaki bütün ürünlerin fiyatı 200 TL dir. Bu mağazadaki ürünlere %10 ile %25 arasında değişen oranlarda indirim yapılıyor.

» Bu mağazadaki ürünlerin satış fiyatları hangi aralıkta olur?

Bilgi Kutusu

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$ şeklindeki eşitsizliklere **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler** denir.

! Eşitsizliğin her iki tarafına aynı sayı eklenirse eşitsizliğin yönü değişmez.

! Eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir sayıyla çarpılırsa ya da pozitif bir sayıya bölünürse eşitsizlik yön değiştirmez.

Örnek

$2x + 6 < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini doğal sayılar ve gerçek sayılar kümelerinde bulalım.

Çözüm

$2x + 6 < 1 \Rightarrow 2x < 1 - 6 \Rightarrow 2x < -5 \Rightarrow x < -\dfrac{5}{2}$ bulunur.

O hâlde denklemin doğal sayılardaki çözüm kümesi { }, gerçek sayılardaki çözüm kümesi $\left(-\infty, -\dfrac{5}{2}\right)$ dir.

> **!** Eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir sayıyla çarpılırsa ya da negatif bir sayıya bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.

Örnek

$5x - 1 \geq 7x + 13$ eşitsizliğinin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulalım.

Çözüm

$5x - 1 \geq 7x + 13 \Rightarrow 5x - 7x \geq 13 + 1 \Rightarrow -2x \geq 14 \Rightarrow x \leq \dfrac{14}{-2} \Rightarrow x \leq -7$

olur. O hâlde denklemin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi $(-\infty, -7]$ dir.

Örnek

$2 \cdot (x + 1) \leq 4x + 6 < 2x + 20$ eşitsizliğinin çözüm kümesini tam sayılar ve gerçek sayılar kümelerinde bulalım.

Çözüm

$$2 \cdot (x + 1) \leq 4x + 6 < 2x + 20 \Rightarrow 2x + 2 - 6 \leq 4x + 6 - 6 < 2x + 20 - 6$$
$$\Rightarrow 2x - 4 \leq 4x < 2x + 14$$
$$\Rightarrow -2x + 2x - 4 \leq 4x - 2x < -2x + 2x + 14$$
$$\Rightarrow -4 \leq 2x < 14 \Rightarrow -2 \leq x < 7 \text{ olur.}$$

Eşitsizliğin tam sayılar kümesindeki çözüm kümesi
$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi $[-2, 7)$ olur.

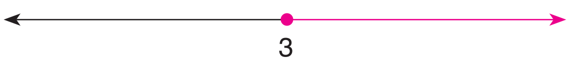
Örnek

$\dfrac{-4x - 8}{5} \leq -4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulalım ve sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

Çözüm

$$\frac{-4x - 8}{5} \leq -4 \Rightarrow 5 \cdot \left(\frac{-4x - 8}{5}\right) \leq -4 \cdot 5$$
$$\Rightarrow -4x - 8 \leq -20 \Rightarrow -4x \leq -20 + 8$$
$$\Rightarrow -4x \leq -12 \Rightarrow x \geq 3 \text{ olur.}$$

Eşitsizliğin çözüm kümesi $[3, \infty)$ olup sayı doğrusu üzerindeki gösterimi aşağıdaki gibidir.



Harezmî
(780-850)

Cebir biliminin kurucusu olan Harezmi, Harzemşahlı bir Türk matematikçisidir. Astronomi ve coğrafya alanlarında da çalışmış, yaptığı katkılarla bu bilim dallarının gelişiminde önemli rol oynamıştır. Harezmî, birinci ve ikinci dereceden denklemleri analitik metotlarla, bir bilinmeyenli denklemleri de cebirsel ve geometrik metotlarla çözmenin kurallarını bulmuştur. Matematikte ilk kez sıfır rakamını kullanmış, zamanın matematiğine yeni bir yön vermiştir.

Sıra Sizde

Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

a) $2x - 5 > 7$

b) $-3x + 8 \leq -1$

c) $2 \cdot (x - 2) + 3 < 7x - 8$

ç) $\frac{-4x + 3}{2} < x - 2$

Örnek

$a, b \in \mathbb{R}$, $-1 < a < 5$ ve $-2 < b < 3$ olduğuna göre $b - 2a$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm

$-1 < a < 5 \Rightarrow (-2) \cdot (-1) > -2 \cdot a > -2 \cdot 5 \Rightarrow 2 > -2a > -10$ olur.

$$\left.\begin{array}{r} -2 < b < 3 \\ -10 < -2a < 2 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 - 10 < b - 2a < 3 + 2 \Rightarrow -12 < b - 2a < 5 \text{ olur.}$$

O hâlde $b - 2a$ ifadesinin alabileceği en küçük tam sayı değeri -11, en büyük tam sayı değeri 4 tür.

Örnek

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-3 \leq x \leq -2$ ve $-4 < y \leq 1$ olduğuna göre $x^2 - y^2$ nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulalım.

Çözüm

$-3 \leq x \leq -2 \Rightarrow (-2)^2 \leq x^2 \leq (-3)^2 \Rightarrow 4 \leq x^2 \leq 9$,

$-4 < y \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y^2 < 16 \Rightarrow -16 < -y^2 \leq 0$ olur.

$$\left.\begin{array}{r} 4 \leq x^2 \leq 9 \\ -16 < -y^2 \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 - 16 < x^2 - y^2 \leq 9 + 0 \Rightarrow -12 < x^2 - y^2 \leq 9 \text{ olur.}$$

O hâlde $x^2 - y^2$ nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı

$(-11) + (-10) + (-9) + (-8) + ... + (+8) + (+9) = -21$ bulunur.

Örnek

$2 \cdot (x + 4) - x + 3 > 16$ eşitsizliğini sağlamayan kaç tane doğal sayı olduğunu bulalım.

Çözüm

$2 \cdot (x + 4) - x + 3 > 16 \Rightarrow 2x + 8 - x + 3 > 16 \Rightarrow x > 16 - 3 - 8 \Rightarrow x > 5$ olur.

O hâlde bu eşitsizliği sağlamayan doğal sayılar 0, 1, 2, 3, 4, 5 olduğundan 6 tanedir.

1. Aşağıdaki tabloda verilen denklemlerin çözüm kümelerini doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve gerçek sayılar kümelerinde bularak sonuçlarını ilgili yerlere yazınız.

Denklem	$\mathbb{N}$ ndeki Çözüm Kümesi	$\mathbb{Z}$ ndeki Çözüm Kümesi	$\mathbb{Q}$ ndeki Çözüm Kümesi	$\mathbb{R}$ ndeki Çözüm Kümesi
$-7x - 1 = -15$				
$2x - 7 = 2$				
$3 \cdot (x - 1) + x = 16$				
$\frac{x-1}{3} + 2(x+1) = 3$				

2. Aşağıdaki tabloda verilen eşitsizliklerin çözüm kümelerini doğal sayılar, tam sayılar ve gerçek sayılar kümelerinde bularak sonuçlarını ilgili yerlere yazınız.

Eşitsizlikler	$\mathbb{N}$ ndeki Çözüm Kümesi	$\mathbb{Z}$ ndeki Çözüm Kümesi	$\mathbb{R}$ ndeki Çözüm Kümesi
$-4x + 6 > 22$			
$-3x + 5 \leq 7 - x$			
$2x + 1 < 17$			
$2x - 5 \geq -1$			

3. $3.(x - 2) + 4 > 8 + x$ eşitsizliğini sağlamayan doğal sayıların toplamı kaçtır?

4. $-2 < x < 3$ ve $x - 3y = 2$ olduğuna göre y nin hangi aralıkta olduğunu bulunuz.

5. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-4 \leq x \leq -1$, $-2 < y \leq 3$ olduğuna göre $x^2 - y^2$ nin alabileceği tam sayı değerleri kaç tanedir?

9.3.3.3. Mutlak Değer İçeren Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizliklerin Çözüm Kümeleri

Bir Gerçek Sayının Mutlak Değeri

» –3, +3, –2, +2, –1, +1 ve 0 sayılarının başlangıç noktasına (sıfır) olan uzaklığının kaç birim olduğunu söyleyiniz.

» Bir gerçek sayının başlangıç noktasına olan uzaklığı negatif bir değer olabilir mi?

Bilgi Kutusu

Bir gerçek sayının, sayı doğrusu üzerindeki görüntüsünün başlangıç noktasına olan uzaklığına, bu gerçek sayının mutlak değeri denir. Bir x gerçek sayısının mutlak değeri $|x|$ ile gösterilir.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $x \geq 0$ ise $|x| = x$ ve $x < 0$ ise $|x| = -x$ tir.

Örnek

$|-5| + 3 \cdot |-2| + |-1|$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$|-5| + 3 \cdot |-2| + |-1| = 5 + 3 \cdot 2 + 1 = 5 + 6 + 1 = 12$ bulunur.

Örnek

$x < y < z$ ise $|x - z| + |z - y| - |x - y|$ ifadesinin en sade hâlini bulalım.

Çözüm

$x < y < z$ olduğundan $x - z < 0$, $z - y > 0$, $x - y < 0$ olur. Buradan

$$|x - z| + |z - y| - |x - y| = -x + z + z - y - (-x + y)$$
$$= -x + 2z - y + x - y = 2z - 2y \text{ bulunur.}$$

Örnek

$-4 < x < 5$ ise $|x - 5| + |x + 4|$ ifadesinin sonucunu bulalım.

Çözüm

$x < 5 \Rightarrow x - 5 < 0$ ve $-4 < x \Rightarrow x + 4 > 0$ olur.

Buradan $|x - 5| + |x + 4| = -x + 5 + x + 4 = 9$ bulunur.

Bilgi Kutusu

Mutlak Değerin Özellikleri

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$,
- $|x| = |-x|$,
- $|x^n| = |x|^n$,
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ tir.

Örnek

Aşağıda verilen işlemlerin sonuçlarını bulalım.

a) $\left|\frac{9 \cdot (-2)}{-6}\right|$ **b)** $\left|\left(-\frac{12}{4}\right)^6\right|$

Çözüm

a) $\left|\frac{9 \cdot (-2)}{-6}\right| = \frac{|9| \cdot |-2|}{|-6|} = \frac{9 \cdot 2}{6} = 3$ olur.

b) $\left|\left(-\frac{12}{4}\right)^6\right| = \left|-\frac{12}{4}\right|^6 = |-3|^6 = 3^6$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen işlemlerin sonuçlarını mutlak değerin özelliklerinden yararlanarak bulunuz.

a) $|7 \cdot 3|$ **b)** $|-6 \cdot 5|$ **c)** $|-3 \cdot (-4)|$

ç) $|-5^4|$ **d)** $|3^5|$ **e)** $\left|\frac{100}{25}\right|$

Mutlak Değer İçeren Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Meteoroloji uzmanları, bir ülkedeki yaz ayları sıcaklık ortalamasının 30 °C olduğunu ve bu sıcaklıktan 5 °C civarında sapmalar olduğunu belirtmişlerdir.

» Bu ülkede, yaz aylarındaki en yüksek ve en düşük sıcaklık değerlerini veren tek bir denklem yazınız.

Bilgi Kutusu

$a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ için $|x| = a$ ise $x = a \vee x = -a$ tir.

Örnek

Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulalım.

a) $|x| = 5$ **b)** $|x| = -3$

Çözüm

a) $|x| = 5$ ise $x = 5$ veya $x = -5$ tir. O hâlde $|x| = 5$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi $\{-5, 5\}$ tir.

b) $|x| = -3$ denklemini sağlayan x değeri yoktur. Çünkü hiçbir gerçek sayının başlangıç noktasına olan uzaklığı negatif olamaz. O hâlde, $|x| = -3$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi $\varnothing$ dir.

! $x \in \mathbb{R}$ için $|x| \geq 0$ olur.

Örnek

$|x - 4| = 7$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$|x - 4| = 7$ ise $x - 4 = 7$ veya $x - 4 = -7$ olur.

$x - 4 = 7 \Rightarrow x = 7 + 4 = 11$ ve $x - 4 = -7 \Rightarrow x = -7 + 4 = -3$ bulunur.

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $\{-3, 11\}$ olur.

Örnek

$3 \cdot |x + 1| + 6 = -3$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$3 \cdot |x + 1| + 6 = -3 \Rightarrow 3 \cdot |x + 1| = -9 \Rightarrow |x + 1| = -3$ bulunur.

Mutlak değerli bir ifade negatif bir sayıya eşit olamayacağından verilen denklemin çözüm kümesi $\varnothing$ dir.

Örnek

$\big|6 - |3 - 2x|\big| = 9$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\big|6 - |3 - 2x|\big| = 9 \Rightarrow 6 - |3 - 2x| = 9$ veya $6 - |3 - 2x| = -9$ olur.

$6 - |3 - 2x| = 9 \Rightarrow -3 = |3 - 2x|$ olduğundan çözüm kümesi $\varnothing$ dir.

$6 - |3 - 2x| = -9 \Rightarrow |3 - 2x| = 15$

$\Rightarrow 3 - 2x = 15$ veya $3 - 2x = -15$

$\Rightarrow 2x = -12$ veya $2x = 18 \Rightarrow x = -6$ veya $x = 9$ bulunur.

Bu durumda verilen denklemin çözüm kümesi $\{-6, 9\}$ olur.

Örnek

$|a + 3| + |b - 2| + |5 - c| = 0$ olduğuna göre $a \cdot b \cdot c$ değerini bulalım.

Çözüm

$a + 3 = 0$, $b - 2 = 0$ ve $5 - c = 0$ olur. Buradan $a = -3$, $b = 2$ ve $c = 5$ bulunur. O hâlde $a \cdot b \cdot c = (-3) \cdot 2 \cdot 5 = -30$ olur.

Örnek

$|2x - 6| = x - 9$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$|2x - 6| = x - 9 \Rightarrow 2x - 6 = x - 9$ veya $2x - 6 = -x + 9$

$\Rightarrow 2x - x = 6 - 9$ veya $3x = 15$

$\Rightarrow x = -3$ veya $x = 5$ bulunur.

Ayrıca mutlak değerin tanımından $x - 9 \geq 0$ ise $x \geq 9$ olur.

$x = -3$ ve $x = 5$ değerleri $x \geq 9$ şartını sağlamadığından verilen denklemin çözüm kümesi $\varnothing$ dir.

Örnek

Sayı doğrusu üzerinde $2x - 1$ ve 7 sayıları arasındaki uzaklık 10 birimdir.

Buna göre x gerçek sayısının alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

$2x - 1$ ile 7 sayıları arasındaki uzaklık 10 birim ise $|2x - 1 - 7| = 10$ olur.

$|2x - 8| = 10 \Rightarrow 2x - 8 = 10 \vee 2x - 8 = -10$

$\Rightarrow 2x = 18 \vee 2x = -2 \Rightarrow x = 9 \vee x = -1$ bulunur.

! x ve y gerçek sayıları arasındaki uzaklık k birim ise $|x - y| = k$ olur.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x + 8| = |x - 6|$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$|x + 8| = |x - 6| \Rightarrow x + 8 = x - 6$ veya $x + 8 = -x + 6$ olur.

$x + 8 = x - 6 \Rightarrow 14 = 0$ olduğundan buradan çözüm kümesi $\varnothing$ olur.

$x + 8 = -x + 6 \Rightarrow 2x = 6 - 8 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$ olur.

$x = -1$ değeri verilen denklemi sağladığından çözüm kümesi $\{-1\}$ olur.

Örnek

$\dfrac{18}{|x+3|+|2x+8|}$ ifadesinin alacağı en büyük değeri bulalım.

Çözüm

> ! Mutlak değerli bir ifadenin alabileceği en küçük değer sıfırdır.

$\dfrac{18}{|x+3|+|2x+8|}$ ifadesinin en büyük olması için paydanın en küçük olması gerekir. $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ ve $2x + 8 = 0 \Rightarrow x = -4$ değerlerini verilen ifadede yerine yazalım.

$$x = -3 \Rightarrow \frac{18}{|-3+3|+|-6+8|} = \frac{18}{2} = 9,$$

$$x = -4 \Rightarrow \frac{18}{|-4+3|+|-8+8|} = \frac{18}{1} = 18 \text{ bulunur.}$$

O hâlde verilen ifadenin en büyük değeri 18 bulunur.

Mutlak Değer İçeren Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

pH bir sıvının asitlik-bazlık derecesini gösteren bir ölçü birimidir. Sağlıklı bir insanın kanındaki asitlik derecesinin 0,2 pH sapmasıyla ortalama 7,6 pH olduğu bilinmektedir.

» Sağlıklı bir insan kanının pH aralığını mutlak değer içeren bir eşitsizlik ile gösterebilir misiniz?

Bilgi Kutusu

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ dır.
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$ dır.
- $a \leq |x| \leq b \Leftrightarrow (a \leq x \leq b \vee -b \leq x \leq -a$ dır.

Örnek

Aşağıda verilen eşitsizliklerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

a) $|x| < 9$ **b)** $|x| \geq 5$

Çözüm

a) $|x| < 9$ ise $-9 < x < 9$ olur. Buradan çözüm kümesi $(-9, 9)$ bulunur.

b) $|x| \geq 5$ ise $x \geq 5 \vee x \leq -5$ olur. Buradan çözüm kümesi $(-\infty, -5] \cup [5, \infty)$ bulunur.

Örnek

Aşağıda verilen eşitsizliklerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulalım.

a) $|x - 2| < 5$ **b)** $|x + 3| \geq 6$

Çözüm

a) $|x - 2| < 5 \Rightarrow -5 < x - 2 < 5$

$\Rightarrow -5 + 2 < x < 5 + 2 \Rightarrow -3 < x < 7$ olur.

Buradan çözüm kümesi $(-3, 7)$ bulunur.

b) $|x + 3| \geq 6 \Rightarrow x + 3 \geq 6 \vee x + 3 \leq -6 \Rightarrow x \geq 3 \vee x \leq -9$ olur.

Buradan çözüm kümesi $(-\infty, -9] \cup [3, \infty)$ bulunur.

Örnek

$1 < |x - 4| < 5$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$1 < |x - 4| < 5 \Rightarrow 1 < x - 4 < 5 \vee -5 < x - 4 < -1$

$\Rightarrow 5 < x < 9 \vee -1 < x < 3$ olur.

O hâlde çözüm kümesi $\{x|\ 5 < x < 9 \vee -1 < x < 3,\ x \in \mathbb{R}\}$ olur.

Örnek

$|3x - 15| \leq 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Mutlak değerli bir ifade negatif olamaz. Bu nedenle $|3x - 15| = 0$ denkleminin çözümünü bulmalıyız.

$|3x - 15| = 0 \Rightarrow 3x - 15 = 0 \Rightarrow x = 5$ olduğundan çözüm kümesi $\{5\}$ bulunur.

Örnek

$|5x - 20| > 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$5x - 20 = 0 \Rightarrow x = 4$ olur. $x = 4$ dışındaki bütün gerçek sayılar $|5x - 20| > 0$ eşitsizliğini sağlar. Bu nedenle çözüm kümesi $\mathbb{R} - \{4\}$ olur.

1. $a < 0 < b$ olmak üzere $|a - b| + |-b| + |-a|$ ifadesinin değerini bulunuz.

2. $1 < x < 2$ ise $|x - 2| + |1 - x|$ ifadesinin değerini bulunuz.

3. Aşağıda verilen mutlak değerli denklemlerin çözüm kümelerini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

a) $|x + 7| = |x - 3|$
b) $5 \cdot |x + 7| = 40$
c) $|3x - 2| = x + 3$
ç) $|x + 1| + 2x = 1$
d) $||3 - x| + 2| = 3$
e) $\left|\frac{x - 1}{x}\right| = 1$

4. Aşağıda verilen mutlak değerli eşitsizliklerin çözüm kümelerini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

a) $|2x + 1| - 5 < 13$
b) $|2x - 1| \geq 7$
c) $1 < |2x - 5| < 7$
ç) $|x - 8| > 0$
d) $|5x - 13| < 0$
e) $|x - 2| \geq 13$

5. Sayı doğrusu üzerinde $2x + 1$ ve 9 sayıları arasındaki uzaklık 8 birimdir. Buna göre x gerçek sayısının alabileceği değerleri bulunuz.

6. $\dfrac{15}{|x - 3| + |x - 5|}$ ifadesinin alacağı en büyük değeri bulunuz.

7. $|2x + 1| \leq 7$ ve $2x + y = 5$ olduğuna göre y nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

9.3.3.4. Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizliklerin Çözüm Kümeleri

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

Bir üniversitenin tiyatro kulübü tarafından "Köy Okulları Tiyatro ile Buluşuyor." isimli bir yardım kampanyası düzenleniyor. Tiyatro kulübü, tiyatro gösterisi için yetişkin ve öğrenci biletlerinden toplam 90 adet satarak 1100 TL gelir elde ediyor. Elde edilen gelir ile öğrencilere kırtasiye malzemeleri alınıyor ve tiyatro kulübünce öğrencilere tiyatro oyunu sergileniyor.

» Öğrenci biletleri satış fiyatı 10 TL, yetişkin biletleri satış fiyatı 15 TL ise her bir biletten kaç adet satıldığını bulunuz.

Bilgi Kutusu

a, b, c ve d sıfırdan farklı gerçek sayılar, m ve n gerçek sayılar olmak üzere

$ax + by = m$

$cx + dy = n$

şeklinde verilen denklemlere **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir.

Örnek

$x + y = 3$

$x - y = 5$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$x - y = 5$ ise $y = x - 5$ tir. $x + y = 3$ denkleminde y yerine $x - 5$ yazarsak,

$x + y = 3 \Rightarrow x + x - 5 = 3 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$ bulunur.

$y = x - 5$ eşitliğinde x yerine 4 yazarsak $y = 4 - 5 = -1$ bulunur.

O hâlde verilen denklem sisteminin çözüm kümesi $\{(4, -1)\}$ olur.

! Denklem sistemlerinde çözüm kümesi her iki denklemi de sağlar.

Bilgi Kutusu

Yerine Koyma Yöntemi

Denklem sistemindeki herhangi bir denklemde değişkenlerden biri eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılır ve bu değişkenin değeri diğer denklemde yerine yazılır. Elde edilen 1. dereceden denklem çözülür. Bulunan değer, denklem sistemindeki denklemlerden herhangi birinde yerine yazılır ve diğer bilinmeyen bulunur.

Örnek

$2x - y = 3$

$x + 2y = 7$

denklem sisteminin çözüm kümesini yerine koyma yöntemi ile bulalım.

Çözüm

$2x - y = 3 \Rightarrow y = 2x - 3$ olur.

$x + 2y = 7$ denkleminde y yerine $2x - 3$ yazalım.

$x + 2y = 7 \Rightarrow x + 2\cdot(2x - 3) = 7 \Rightarrow x + 4x - 6 = 7$

$\Rightarrow 5x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{5}$ bulunur.

$y = 2x - 3$ eşitliğinde x yerine $\frac{13}{5}$ yazarsak,

$y = 2\cdot x - 3 \Rightarrow y = 2\cdot\frac{13}{5} - 3 \Rightarrow y = \frac{26}{5} - 3 = \frac{11}{5}$ bulunur.

O hâlde verilen denklem sisteminin çözüm kümesi $\left\{\left(\frac{13}{5}, \frac{11}{5}\right)\right\}$ olur.

Örnek

$x + y = 5$

$x - y = 13$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ + \; x - y = 13 \end{array}\right\}$$ denklemlerini taraf tarafa toplayalım.

$2x = 18 \Rightarrow x = 9$ bulunur.

$x = 9$ değerini herhangi bir denklemde yerine yazalım.

$x + y = 5 \Rightarrow 9 + y = 5 \Rightarrow y = -4$ bulunur.

O hâlde verilen denklem sisteminin çözüm kümesi $\{(9, -4)\}$ olur.

Bilgi Kutusu

Yok Etme Yöntemi

Verilen denklem sisteminde bilinmeyenlerden birisinin katsayıları eşit ve zıt işaretli olacak şekilde düzenlenir. Daha sonra her iki denklem taraf tarafa toplanarak bilinmeyenlerden birisi yok edilir. Elde edilen 1. dereceden denklem çözülür. Bulunan değer, denklem sistemindeki denklemlerden herhangi birinde yerine yazılır ve diğer bilinmeyen bulunur.

Örnek

$2x - 3y = 5$

$3x + 4y = -1$

denklem sisteminin çözüm kümesini yok etme yöntemi ile bulalım.

Çözüm

$$\left.\begin{array}{r} -3\cdot(2x - 3y) = 5\cdot(-3) \\ 2\cdot(3x + 4y) = -1\cdot 2 \end{array}\right\}$$ Birinci denklemi -3 ile ikinci denklemi 2 ile çarpalım.

$$\left.\begin{array}{r} -6x + 9y = -15 \\ +\ \ 6x + 8y = -2 \end{array}\right\}$$ Denklemleri taraf tarafa toplayalım.

$17y = -17 \Rightarrow y = -1$ bulunur.

$y = -1$ değerini herhangi bir denklemde yerine yazalım.

$2x - 3y = 5 \Rightarrow 2\cdot x - 3\cdot(-1) = 5 \Rightarrow 2x = 5 - 3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$ bulunur.
O hâlde verilen denklem sisteminin çözüm kümesi $\{(1, -1)\}$ olur.

Sıra Sizde

$3x - 2y = 1$

$x + y = -1$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Örnek

$x - y = 2$

$-3x + 3y = -6$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

! Çakışık iki doğrudan oluşan bir denklem sisteminde çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

Çözüm

$$\left.\begin{array}{r} 3\cdot(x - y) = 2\cdot 3 \\ -3x + 3y = -6 \end{array}\right\}$$ 1. denklemi 3 ile çarpalım.

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 3y = 6 \\ +\ -3x + 3y = -6 \end{array}\right\}$$ Denklemleri taraf tarafa toplayalım.

$0 = 0$ doğru önermesi elde edilir.

O hâlde denklemin çözüm kümesi $\mathbb{R}$ dir.

$x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2$ ve $-3x + 3y = -6 \Rightarrow 3y = 3x - 6 \Rightarrow y = x - 2$ olur.

Görüldüğü gibi verilen denklem sisteminin grafikleri aynıdır. Yani bu iki doğru çakışıktır.

! $y = ax + b$ şeklindeki denklemlerin grafiğini çizebilmek için $x = 0$ için y değeri ve $y = 0$ için x değeri bulunur.

Örnek

$x + 3y = 6$

$y + x = 4$

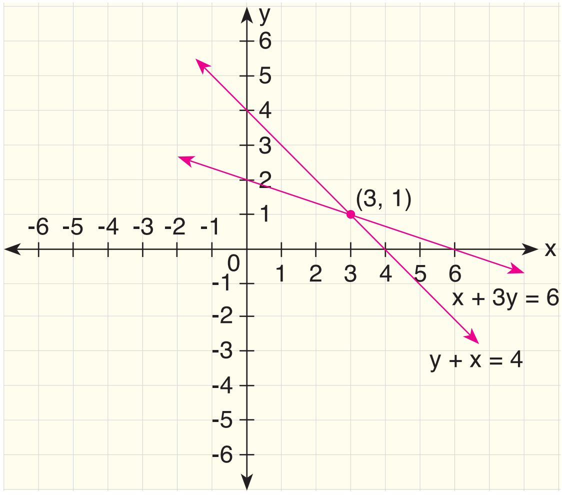
denklem sisteminin çözüm kümesini bu iki doğrunun grafiklerinden yararlanarak bulalım.

Çözüm

$x + 3y = 6$ denkleminde $x = 0$ için $y = 2$ ve $y = 0$ için $x = 6$ bulunur.
O hâlde bu doğru (0, 2) ve (6, 0) noktalarından geçer.

$y + x = 4$ denkleminde $x = 0$ için $y = 4$ ve $y = 0$ için $x = 4$ bulunur.

O hâlde bu doğru (0, 4) ve (4, 0) noktalarından geçer. Bu durumda bu iki doğrunun grafiği aşağıdaki gibi olur.



! İki doğrunun kesişim noktası denklem sisteminin çözümünü göstermektedir.

Yukarıdaki grafikte görüldüğü gibi doğruların kesiştiği (3, 1) noktası denklem sisteminin çözüm kümesidir. Bu denklem sistemi için bulduğumuz çözüm kümesi, yerine koyma ya da yok etme yöntemi ile de bulunabilir.

Örnek

$2x + 2y = 4$

$x + y = 3$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 4 \\ -2\cdot(x + y) &= 3\cdot(-2) \end{aligned}\right\}$$ 2. denklemi -2 ile çarpalım.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 4 \\ + \;\; -2x - 2y &= -6 \end{aligned}\right\}$$ Denklemleri taraf tarafa toplayalım.

$0 = -2$ yanlış önermesi elde edilir.

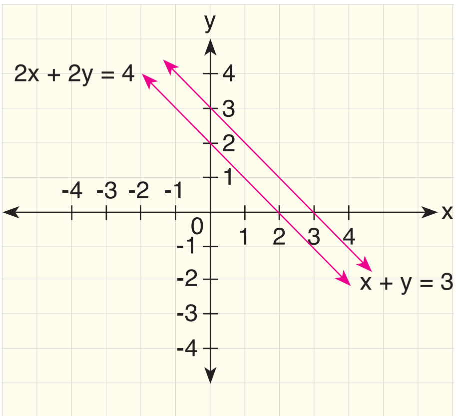
O hâlde denklemin çözüm kümesi ∅ dir.

Şimdi de denklem sisteminin çözüm kümesini bu iki doğrunun grafiklerinden yararlanarak bulalım.

$2x + 2y = 4$ denkleminde $x = 0$ için $y = 2$ ve $y = 0$ için $x = 2$ bulunur. O hâlde bu doğru (0, 2) ve (2, 0) noktalarından geçer.

$x + y = 3$ denkleminde $x = 0$ için $y = 3$ ve $y = 0$ için $x = 3$ bulunur. O hâlde bu doğru (3, 0) ve (0, 3) noktalarından geçer.

Bu durumda bu iki doğrunun grafiği aşağıdaki gibi olur.



Grafikten görüldüğü gibi doğrular birbirine paraleldir ve kesişim noktaları yoktur. Bu nedenle çözüm kümesi ∅ dir.

Paralel iki doğrudan oluşan bir denklem sisteminde çözüm kümesi boş kümedir.

Sıra Sizde

$2x + 3y = 3$

$4x + 6y = 4$

denklem sisteminin çözüm kümesini grafik yardımıyla bulunuz.

Bilgi Kutusu

$\left.\begin{array}{l} ax + by + m = 0 \\ cx + dy + n = 0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminde

❖ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{m}{n}$ ise doğrular çakışıktır ve çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

❖ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{m}{n}$ ise doğrular paraleldir ve çözüm kümesi ∅ dir.

❖ $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ ise doğrular bir noktada kesişir ve çözüm kümesi bir elemanlıdır.

Örnek

$(a - 3)x + 2y - 4 = 0$

$5x + 3y - 1 = 0$

denklem sisteminin çözüm kümesinin bir elemanlı olması için a nın hangi değeri alamayacağını bulalım.

Çözüm

Verilen denklem sisteminin bir elemanlı olması için $\frac{a-3}{5} \neq \frac{2}{3}$ olmalıdır.

$\frac{a-3}{5} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow 3 \cdot (a - 3) \neq 2 \cdot 5 \Rightarrow 3a - 9 \neq 10$

$\Rightarrow 3a \neq 19$

$\Rightarrow a \neq \frac{19}{3}$ bulunur.

O hâlde a değeri $\frac{19}{3}$ olamaz.

Örnek

$(a - 1)x + 2y - b + 4 = 0$

$2x - 3y + 4 = 0$

denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı olduğuna göre b – a değerini bulalım.

Çözüm

Verilen denklem sisteminin çözüm kümesinin sonsuz elemanlı olması için $\frac{a-1}{2} = \frac{2}{-3} = \frac{-b+4}{4}$ olmalıdır.

$\frac{a-1}{2} = \frac{2}{-3} \Rightarrow -3 \cdot (a - 1) = 2 \cdot 2 \Rightarrow -3a + 3 = 4$

$\Rightarrow -3a = 1$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{3}$ bulunur.

$\frac{2}{-3} = \frac{-b+4}{4} \Rightarrow 2 \cdot 4 = -3 \cdot (-b + 4) \Rightarrow 8 = 3b - 12$

$\Rightarrow 20 = 3b$

$\Rightarrow b = \frac{20}{3}$ bulunur.

Buradan $b - a = \frac{20}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{20}{3} + \frac{1}{3} = \frac{21}{3} = 7$ bulunur.

Örnek

$(a-1)x-2y+4=0$

$(2a+1)x+3y-5=0$

denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre a nın değerini bulalım.

Çözüm

Verilen denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme ise

$\frac{a-1}{2a+1}=\frac{-2}{3}\neq\frac{4}{-5}$ olmalıdır.

$\frac{a-1}{2a+1}=\frac{-2}{3}\Rightarrow 3\cdot(a-1)=-2\cdot(2a+1)$

$\Rightarrow 3a-3=-4a-2$

$\Rightarrow 7a=1\Rightarrow a=\frac{1}{7}$ bulunur.

Sıra Sizde

$(m-2)x+3y-n-5=0$

$3x-4y+6=0$

denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı olduğuna göre $m\cdot n$ kaçtır?

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$x<3$ $\quad$ $y>-1$

» Yukarıda verilen eşitsizlikleri koordinat sisteminde çizerek iki eşitsizliği aynı anda sağlayan ve sağlamayan noktalara örnekler veriniz.

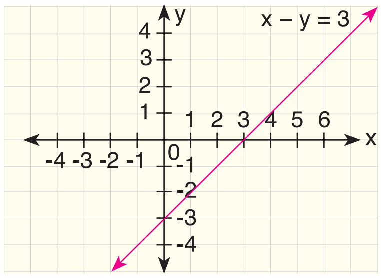
Bilgi Kutusu

a, b, c birer gerçek sayı, a ve b sıfırdan farklı olmak üzere $ax+by\leq c$, $ax+by<c$, $ax+by\geq c$, $ax+by>c$ şeklindeki ifadelere **birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlikler** denir.

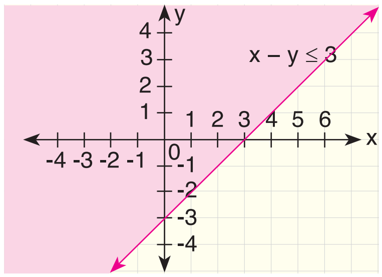
Örnek

$x - y \leq 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm



$x - y = 3$ doğrusunun grafiğini çizelim. $x = 0$ için $y = -3$ ve $y = 0$ için $x = 3$ bulunur. O hâlde bu doğru $(0, -3)$ ve $(3, 0)$ noktalarından geçer. Bu durumda bu doğrunun grafiği yandaki gibi olur.



Hangi bölgenin çözüm kümesi olduğunu bulabilmek için herhangi bir nokta alıp eşitsizlikte yerine yazalım. $(0, 0)$ noktası $x - y \leq 3$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$x - y \leq 3 \Rightarrow 0 - 0 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq 3$$

doğru önermesi elde edilir. Bu nedenle $(0, 0)$ noktasının bulunduğu bölge boyanır.

Boyalı bölgede bulunan sonsuz farklı nokta verilen eşitsizliğin çözüm kümesidir.

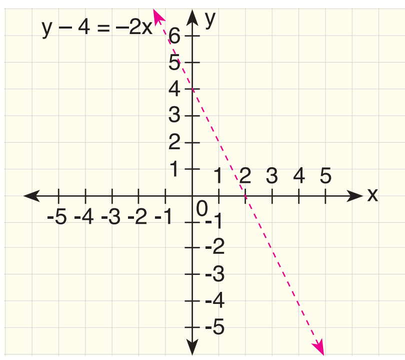
> **!** Eşitsizlik işaretleri "≤" ya da "≥" ise doğru grafiği kesiksiz çizgi ile çizilir.

Örnek

$y - 4 > -2x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini koordinat sisteminde gösterelim.

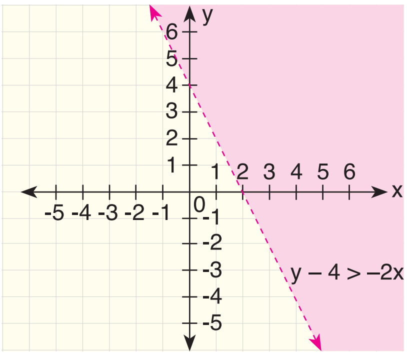
> **!** Eşitsizlik işaretleri ">" ya da "<" ise doğru grafiği kesikli çizgi ile çizilmelidir.

Çözüm



$y - 4 = -2x$ doğrusunun grafiğini çizelim. $x = 0$ için $y = 4$ ve $y = 0$ için $x = 2$ bulunur.

O hâlde bu doğru $(0, 4)$ ve $(2, 0)$ noktalarından geçer. Bu durumda bu doğrunun grafiği yandaki gibi olur.



(0, 0) noktası eşitsizlikte yerine yazılırsa

$y - 4 > -2x \Rightarrow 0 - 4 > -2 \cdot (0)$

$\Rightarrow -4 > 0$

yanlış önermesi elde edilir. Bu nedenle (0, 0) noktasının bulunmadığı bölge boyanır.

Boyalı bölgede bulunan sonsuz farklı nokta verilen eşitsizliğin çözüm kümesidir.

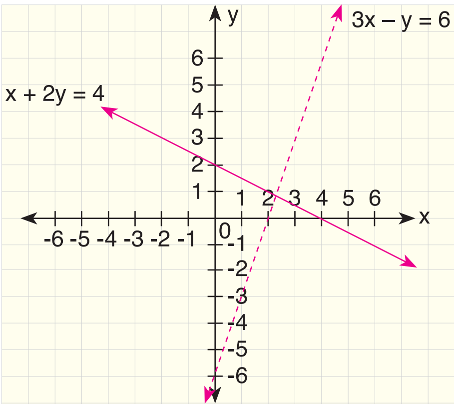
Örnek

$3x - y > 6$

$x + 2y \leq 4$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm

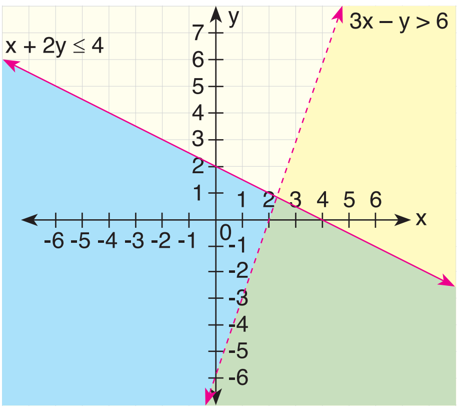


$3x - y = 6$ denklemi için $x = 0$ ise $y = -6$, $y = 0$ ise $x = 2$ olur. Grafik (0, – 6) ve (2, 0) noktalarından geçer.

$x + 2y = 4$ denklemi için $x = 0$ ise $y = 2$, $y = 0$ ise $x = 4$ olur.

Grafik (0, 2) ve (4, 0) noktalarından geçer.

Bu durumda doğruların grafikleri yandaki gibi olur.



(0, 0) noktası için,

$3x - y > 6 \Rightarrow 3 \cdot 0 - 0 > 6 \Rightarrow 0 > 6$

yanlış önermesi elde edilir. (0, 0) noktasının bulunmadığı bölge boyanır.

(0, 0) noktası için,

$x + 2y \leq 4 \Rightarrow 0 + 2 \cdot 0 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq 4$

doğru önermesi elde edilir. (0, 0) noktasının bulunduğu bölge boyanır.

Yeşil renkli bölgede bulunan sonsuz farklı nokta, verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesidir.

Sıra Sizde

$3 \leq x - y \leq 5$ eşitsizliğini sağlayan (x, y) sıralı ikililerinin belirttiği bölgeyi koordinat sisteminde gösteriniz.

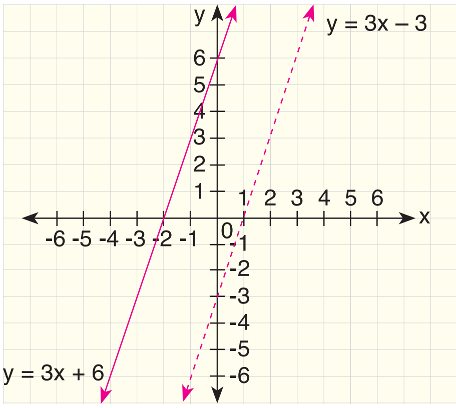
Örnek

$y \geq 3x + 6$

$y < 3x - 3$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini koordinat sisteminde gösterelim.

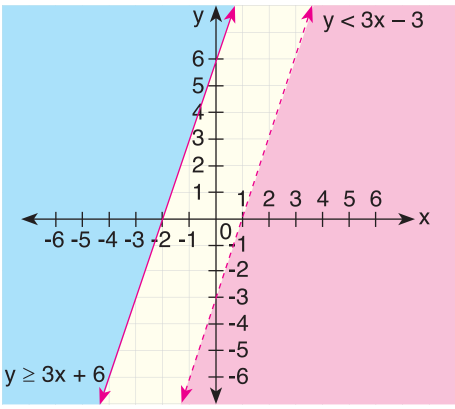
Çözüm



$y = 3x + 6$ denklemi için $x = 0$ ise $y = 6$, $y = 0$ ise $x = -2$ olur. Grafik (0, 6) ve (–2, 0) noktalarından geçer.

$y = 3x - 3$ denklemi için $x = 0$ ise $y = -3$, $y = 0$ ise $x = 1$ olur. Grafik (0, –3) ve (1, 0) noktalarından geçer.

Bu durumda doğruların grafikleri yandaki gibi olur.



(0, 0) noktası için,

$y \geq 3x + 6 \Rightarrow 0 \geq 3 \cdot 0 + 6 \Rightarrow 0 \geq 6$ yanlış önermesi elde edilir. (0, 0) noktasının bulunmadığı bölge boyanır.

(0, 0) noktası için

$y < 3x - 3 \Rightarrow 0 < 3 \cdot 0 - 3 \Rightarrow 0 < -3$ yanlış önermesi elde edilir. (0, 0) noktasının bulunmadığı bölge boyanır.

Görüldüğü gibi her iki bölgede boyanan ortak bölge yoktur. Bu nedenle eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi boş kümedir.

1. Aşağıda verilen denklem sistemlerinin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\frac{x}{3} - 2y = -3$

$\frac{x}{2} + y = 22$

b) $3a - 5b = 1$

$4a - 10b = 7$

2. $ax + 3y = 15$ ve $3x + by = 4$ denklemlerinin grafiklerinin kesim noktası $(2, 1)$ olduğuna göre $a + b$ kaçtır?

3. $-3x + y - 5 = 0$

$(a - 1)x + 3y + b - 1 = 0$

denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı ise $a + b$ kaçtır?

4. Aşağıdaki sıralı ikililerin $2x - y \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesinde olup olmadığını bulunuz.

a) $(1, 0)$ **b)** $(-2, 4)$ **c)** $(3, 1)$

ç) $(5, 3)$ **d)** $(-4, 7)$ **e)** $(0, 0)$

5. Aşağıda verilen eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini koordinat sisteminde gösteriniz.

a) $y < 3x - 1$

$x \geq 9 - 2y$

b) $x - 9 \geq -3y$

$2x + 1 > y$

c) $2x - 3y \leq 5$

$-2x + y < 2$

ç) $\frac{2}{3} > x - y$

$2y + 10 < -\frac{2x}{3}$

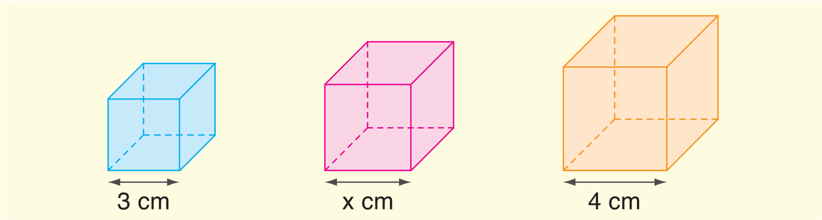
Sembol ve Gösterimler

x^n

$\sqrt[n]{x^m}$

$x^{\frac{m}{n}}$

9.3.4. ÜSLÜ İFADELER VE DENKLEMLER



- Yukarıda verilen mavi ve turuncu renkli küplerin hacimlerini bulunuz. Bulduğunuz hacimleri üslü ifade şeklinde yazabilir misiniz?
- Pembe renkli küpün yüzey alanı 78 cm^2 ise bir ayrıtının uzunluğunu bulunuz.

9.3.4.1. Üslü İfadeleri İçeren Denklemler

Üslü İfadeler ve Özellikleri

Bir kültürdeki bakteri sayısı her 1 dakikalık süre sonunda 3 katına çıkmaktadır. Bu kültürde başlangıçta 1 bakteri vardır.

» 5 dakika sonunda kültürdeki bakteri sayısı kaç olur? Üslü ifade kullanarak yazınız.

Bilgi Kutusu

$x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere x^n ifadesine **üslü ifade** adı verilir. x^n ifadesinde x sayısına **taban**, n sayısına **üs** veya **kuvvet** denir.

! $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ tane}}$

Örnek

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulalım.

a) 2^4 **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ **c)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ **ç)** $(-3)^4$

Çözüm

a) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ olur.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ olur.

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$ olur.

ç) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ **b)** 3^5 **c)** $(-3)^5$

! $x^0 = 1 \left(x \in \mathbb{R} - \{0\}\right)$

$0^n = 0 \; (n \in \mathbb{Z}^+)$

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$x^m \cdot x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ tane}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ tane}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m+n \text{ tane}} = x^{m+n} \text{ olur.}$$

Bilgi Kutusu

$x \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ tir.

Örnek

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$x^n \cdot y^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ tane}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{n \text{ tane}} = \underbrace{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \ldots \cdot (x \cdot y)}_{n \text{ tane}} = (x \cdot y)^n \text{ olur.}$$

Bilgi Kutusu

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$ tir.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m \cdot x^m \cdot \ldots \cdot x^m}_{n \text{ tane}} = x^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ tane}}} = x^{m \cdot n} \text{ olur.}$$

Bilgi Kutusu

$x \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ tir.

John Napier
(Con Neypıır)
(1550-1617)

Üslü olarak verilen bazı ifadelerin değerlerini hesaplamada kolaylık sağlayan logaritmayı ilk kullanan kişidir.

Üzerindeki sayılarla çarpmayı ve üslü işlemleri hesaplamayı kolaylaştıran Napier'in Kemikleri adı verilen tahta çubukları bulmuştur.

! Üsleri pozitif tam sayı olan üslü ifadelerle ilgili kurallar, üsleri negatif tam sayı olan üslü ifadeler için de geçerlidir.

! $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

olur.

Örnek

$x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$m > n \text{ ise } \frac{x^m}{x^n} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{m \text{ tane}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ tane}}} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{m-n \text{ tane}} \cdot \overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{n \text{ tane}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ tane}}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m-n \text{ tane}} = x^{m-n}$$

$$m = n \text{ ise } \frac{x^m}{x^n} = \frac{x^m}{x^m} = 1 = x^0 = x^{m-n} \text{ olur.}$$

$$m < n \text{ ise } \frac{x^m}{x^n} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{m \text{ tane}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ tane}}} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{m \text{ tane}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ tane}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n-m \text{ tane}}}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n-m \text{ tane}}} = \frac{1}{x^{n-m}} = x^{m-n} \text{ olur.}$$

Bilgi Kutusu

$x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ tir.

Örnek

$x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$\frac{x^n}{y^n} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{n \text{ tane}}}{\underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{n \text{ tane}}} = \underbrace{\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{y}}_{n \text{ tane}} = \left(\frac{x}{y}\right)^n \text{ olur.}$$

Bilgi Kutusu

$x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$ tir.

Örnek

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $[(-2)^{-3}]^{-1}$ **b)** $\dfrac{2^{-3}\cdot 2^{4}}{8^{2}}$ **c)** $\dfrac{6^{9}}{2^{2}\cdot 2^{7}}$

Çözüm

a) $[(-2)^{-3}]^{-1} = \left[\dfrac{1}{(-2)^{3}}\right]^{-1} = \left(\dfrac{1}{-8}\right)^{-1} = -8$ olur.

b) $\dfrac{2^{-3}\cdot 2^{4}}{8^{2}} = \dfrac{2^{-3+4}}{(2^{3})^{2}} = \dfrac{2^{1}}{2^{6}} = 2^{1-6} = 2^{-5} = \dfrac{1}{2^{5}} = \dfrac{1}{32}$ olur.

c) $\dfrac{6^{9}}{2^{2}\cdot 2^{7}} = \dfrac{6^{9}}{2^{2+7}} = \dfrac{6^{9}}{2^{9}} = \left(\dfrac{6}{2}\right)^{9} = 3^{9}$ olur.

Örnek

$2^{x} = a$ ve $3^{x} = b$ olduğuna göre 144^{2x} in a ve b türünden eşitini bulalım.

Çözüm

$144^{2x} = (2^{4}\cdot 3^{2})^{2x} = (2^{4})^{2x}\cdot(3^{2})^{2x} = 2^{8x}\cdot 3^{4x} = (2^{x})^{8}\cdot(3^{x})^{4}$ olur.

$2^{x} = a$ ve $3^{x} = b$ ise $144^{2x} = (2^{x})^{8}\cdot(3^{x})^{4} = a^{8}\cdot b^{4}$ bulunur.

Örnek

$12^{x} = 4^{x+1}$ olduğuna göre $3^{x} - 9^{x}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$12^{x} = 4^{x+1} \Rightarrow (3\cdot 4)^{x} = 4^{x+1} \Rightarrow 3^{x}\cdot 4^{x} = 4^{x}\cdot 4 \Rightarrow 3^{x} = 4$ olur.

$3^{x} - 9^{x} = 3^{x} - 3^{2x} = 3^{x} - (3^{x})^{2} = 4 - 4^{2} = -12$ bulunur.

Örnek

$x = 2^{51}$, $y = 3^{68}$, $z = 7^{34}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

Çözüm

$x = 2^{51} = (2^{3})^{17} = 8^{17}$,

$y = 3^{68} = (3^{4})^{17} = 81^{17}$,

$z = 7^{34} = (7^{2})^{17} = 49^{17}$ olur.

$8^{17} < 49^{17} < 81^{17}$ olduğundan $x < z < y$ bulunur.

! Üslü sayıları sıralamak için tabanlarını ya da üslerini aynı yapmak kolaylık sağlar.

! Üsleri aynı olan sayılardan tabanı küçük olan sayı daha küçüktür.

! Tabanları aynı olan sayıları sıralarken taban 0 ile 1 arasında ise üssü büyük olan sayı daha küçüktür.

Örnek

$a = \left(\frac{2}{3}\right)^{26}$, $b = \left(\frac{8}{27}\right)^{11}$, $c = \left(\frac{4}{9}\right)^{14}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

Çözüm

$b = \left(\frac{8}{27}\right)^{11} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{11} = \left(\frac{2}{3}\right)^{33}$, $c = \left(\frac{4}{9}\right)^{14} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{14} = \left(\frac{2}{3}\right)^{28}$ olur.

$\left(\frac{2}{3}\right)^{33} < \left(\frac{2}{3}\right)^{28} < \left(\frac{2}{3}\right)^{26} \Rightarrow \left(\frac{8}{27}\right)^{11} < \left(\frac{4}{9}\right)^{14} < \left(\frac{2}{3}\right)^{26}$ olduğundan

$b < c < a$ bulunur.

Örnek

$\frac{2^{18} + 2^{16} + 2^{12}}{4^{7} + 4^{6} + 4^{4}}$ ifadesinin değerini bulalım.

! $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a \cdot x^n + b \cdot x^n - c \cdot x^n = (a + b - c) \cdot x^n$ dir.

Çözüm

$$\frac{2^{18} + 2^{16} + 2^{12}}{4^{7} + 4^{6} + 4^{4}} = \frac{2^{18} + 2^{16} + 2^{12}}{2^{14} + 2^{12} + 2^{8}} = \frac{2^{12}(2^{6} + 2^{4} + 1)}{2^{8}(2^{6} + 2^{4} + 1)}$$

$= 2^{12-8} = 2^4 = 16$ bulunur.

Örnek

$4{,}3 \cdot 10^6 + 250 \cdot 10^3 - 0{,}5 \cdot 10^5$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$4{,}3 \cdot 10^6 + 250 \cdot 10^3 - 0{,}5 \cdot 10^5 = 430 \cdot 10^4 + 25 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^4$

$= (430 + 25 - 5) \cdot 10^4 = 450 \cdot 10^4$ bulunur.

Örnek

Bir kâğıt fabrikasında üretilen 13 500 000 adet A4 kâğıdı paketlenerek satılmıştır.

Her pakette 500 adet A4 kâğıdı bulunduğuna göre kaç paket kâğıt satıldığını bulalım.

Çözüm

Paket sayısı $= \frac{13\,500\,000}{500} = \frac{135 \cdot 10^5}{5 \cdot 10^2} = 27 \cdot 10^3 = 27\,000$ olur.

Örnek

Emel son 2 yıldır Türk Kızılayına nakit bağış yapmaktadır. t. yılda yaptığı bağış miktarı $180 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^t$ ifadesi ile hesaplanabilmektedir.

Buna göre Emel son 2 yılda Türk Kızılayına kaç lira nakit bağış yapmıştır?

Çözüm

$t = 1 \Rightarrow 180 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^1 = 180 \cdot \frac{4}{3} = 240$ TL ve

$t = 2 \Rightarrow 180 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 180 \cdot \frac{16}{9} = 320$ TL olur.

O hâlde Emel son 2 yılda 240 + 320 = 560 TL bağış yapmıştır.

Üslü Denklemler

1 metre yükseklikten düşey olarak bırakılan bir top her seferinde bir önceki yüksekliğinin $\frac{1}{2}$ i kadar zıplıyor.

» Top kaçıncı kez zıpladığında $\frac{1}{64}$ metre yükselir?

Bilgi Kutusu

Değişkenin üs olarak yer aldığı denklemlere **üslü denklemler** denir.

Örnek

$x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^m = x^n \Leftrightarrow m = n$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$x^m = x^n \Rightarrow \frac{x^m}{x^n} = \frac{x^n}{x^n} = x^{m-n} = 1 \Rightarrow m - n = 0 \Rightarrow m = n$ olur.

$m = n \Rightarrow m - n = 0 \Rightarrow x^{m-n} = x^0 \Rightarrow \frac{x^m}{x^n} = 1 \Rightarrow x^m = x^n$ olur.

Bilgi Kutusu

$x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^m = x^n \Leftrightarrow m = n$ tir.

Örnek

$5^{3x-2} = 625$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$5^{3x-2} = 625 = 5^4 \Rightarrow 3x - 2 = 4 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$ bulunur.

O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi {2} olur.

Örnek

$2^x + 4 \cdot 2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-1} = 60$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$2^x + 4 \cdot 2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-1} = 60 \Rightarrow 2^x + 4 \cdot 2^x \cdot 2^1 - 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-1} = 60$$

$$\Rightarrow 2^x\left(1 + 8 - \frac{3}{2}\right) = 60$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot \frac{15}{2} = 60 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3 \text{ olur.}$$

O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi {3} tür.

Örnek

$2^x = 6$ ve $3^y = 8$ olduğuna göre $2x + y$ nin değerini bulalım.

Çözüm

$2^x = 6$ ve $3^y = 8$ eşitliklerini taraf tarafa çarpalım.

$2^x \cdot 3^y = 6 \cdot 8 = 2 \cdot 3 \cdot 2^3 \Rightarrow 2^x \cdot 3^y \Rightarrow 2^4 \cdot 3^1 \Rightarrow x = 4$ ve $y = 1$ olur.

Buradan $2x + y = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ bulunur.

Örnek

Bir kapta t dakika sonundaki bakteri sayısı $y = 3 \cdot 2^t$ ile hesaplanabiliyor.

Buna göre bu kaptaki bakteri sayısının kaç dakika sonra 1536 olacağını bulalım.

Çözüm

Kaptaki bakteri sayısı t dakika sonra 1536 olsun.

O hâlde $3 \cdot 2^t = 1536 \Rightarrow 2^t = 512 = 2^9 \Rightarrow t = 9$ olur.

Örnek

$(0,2)^{-3x+1} = 25^{x+3}$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$(0,2)^{-3x+1} = 25^{x+3} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{-3x+1} = 5^{2(x+3)}$$

$$\Rightarrow 5^{-(-3x+1)} = 5^{2(x+3)}$$

$$\Rightarrow 3x - 1 = 2x + 6 \Rightarrow x = 7 \text{ bulunur.}$$

O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi {7} dir.

Bilgi Kutusu

$x, y \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ olmak üzere $x^n = y^n$ denkleminde

- n tek ise $x = y$ tir.
- n çift ise $|x| = |y|$ tir.

Örnek

Aşağıdaki eşitliklerde x in alacağı değerleri bulalım.

a) $x^4 = 16$ **b)** $(x+1)^{20} = 1$ **c)** $(x-2)^{11} = (-3)^{11}$

Çözüm

a) $x^4 = 16 \Rightarrow x^4 = 2^4$ ve 4 çift sayı olduğu için $|x| = 2$ olur.
O hâlde $x = -2 \vee x = 2$ bulunur.

b) $(x+1)^{20} = 1 \Rightarrow |x+1| = 1 \Rightarrow x + 1 = 1 \vee x + 1 = -1 \Rightarrow x = 0 \vee x = -2$ olur.

c) $(x-2)^{11} = (-3)^{11}$ denkleminde 11 tek sayı olduğu için
$x - 2 = -3 \Rightarrow x = -1$ olur.

Örnek

$(2x-3)^4 = 256$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$(2x-3)^4 = 256 = 4^4 \Rightarrow |2x-3| = 4$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = 4 \vee 2x - 3 = -4$$

$$\Rightarrow 2x = 7 \vee 2x = -1 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \vee x = -\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right\}$ olur.

Örnek

$(n-2)^{10} = (n^2-3n)^5$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$(n-2)^{10} = (n^2-3n)^5 \Rightarrow [(n-2)^2]^5 = (n^2-3n)^5$$
$$\Rightarrow (n^2-4n+4)^5 = (n^2-3n)^5$$
$$\Rightarrow n^2-4n+4 = n^2-3n$$
$$\Rightarrow n = 4 \text{ bulunur.}$$

O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi {4} tür.

Örnek

$(a-2)^{3a+6} = 1$ denklemini sağlayan a değerlerinin toplamını bulalım.

Çözüm

- $a-2 \neq 0$ ve $3a+6=0 \Rightarrow a=-2$ olur.
- $a-2=1 \Rightarrow a=3$ olur.
- $a-2=-1 \Rightarrow a=1$ olur.

$a=1$ için $3a+6 = 3\cdot1+6 = 9$ tek sayı olduğundan $a=1$ olamaz.

O hâlde a'nın alacağı değerlerin toplamı $-2+3=1$ bulunur.

! $x^n = 1$ ise
- $x \neq 0$ ve $n=0$ tir.
- $x=1$ ve $n \in R$ dır.
- $x=-1$ ve n çift tam sayıdır.

Sıra Sizde

$(n-3)^{n^2-9n} = 1$ denklemini sağlayan n değerlerini bulunuz.

Örnek

$2^{x+y-5} = 5^{2x-y+2}$ olduğuna göre $x\cdot y$ nin değerini bulalım.

Çözüm

2 ve 5 aralarında asal sayılar olduğu için verilen eşitlik sadece üslerin 0 olduğu durumda doğrudur.

$$x+y-5=0$$
$$2x-y+2=0$$

$3x-3=0 \Rightarrow x=1$ olur. $x+y-5=0 \Rightarrow 1+y-5=0 \Rightarrow y=4$ olur.

O hâlde $x\cdot y = 1\cdot4 = 4$ bulunur.

1. $\dfrac{17^0 \cdot 9^2 + 3 \cdot 3^4 + 27^2}{3^2 \cdot 13}$ işleminin sonucu kaçtır?

2. $4^{x-3} = a$ olduğuna göre 2^{2x-1} in a türünden eşitini bulunuz.

3. $2^x = a$ ve $5^x = b$ olduğuna 200^x in a ve b türünden eşitini bulunuz.

4. $\left(\dfrac{2}{25}\right)^4 : \dfrac{5^{-6}}{2} \cdot 5^{10}$ işleminin sonucu kaçtır?

5. $\dfrac{53^7 + 3 \cdot 53^6}{2 \cdot 53^6 + 106 \cdot 53^5}$ işleminin sonucu kaçtır?

6. $(a+3)^{2a-5} = 1$ denklemini sağlayan a değerlerinin toplamı kaçtır?

7. $7^{x+2} + 2 \cdot 7^x + 7^{x+3} = 2758$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

8. $\dfrac{6^a + 6^a + 6^a}{2 \cdot 3^a + \dfrac{1}{3^{-a}}} = 32$ olduğuna göre a kaçtır?

9. $225^x = 3^{2x+4}$ olduğuna göre 5^{2x+1} ifadesinin değeri kaçtır?

10. 2^{164}, 3^{123}, 5^{82} sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

11. Bir bölgede t. aydaki aylık yağış miktarı $1930 \cdot \left(\dfrac{3}{10}\right)^t$ mm ile ifade edilmektedir.

Buna göre tablodaki boşlukları uygun biçimde doldurunuz.

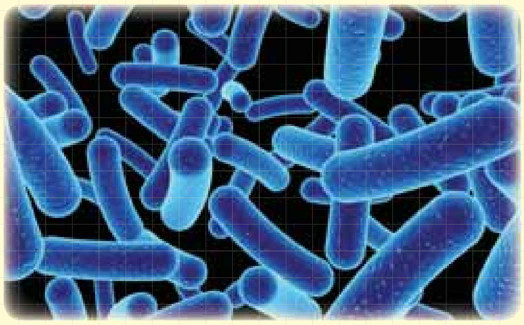
Ay	1.	2.	3.	4.
Yağış miktarı (mm)				

12. Başlangıç değeri A, artış oranı r, geçen süre t olmak üzere sabit bir yüzde ile büyüme içeren durumlar $y = A \cdot (1 + r)^t$ ile ifade edilmektedir.

Buna göre maaşı 3000 TL olan Rıza Bey'in maaşı yıllık %10 artarsa kaç yıl sonra 3630 lira olur?

9.3.4.2. Köklü İfadeleri İçeren Denklemler

Köklü İfadeler ve Özellikleri



Bir kültürdeki bakteri sayısı t geçen saati göstermek üzere 2^t ifadesi ile hesaplanabilmektedir. Bu kültürde başlangıçta 1 bakteri vardır.

» Yarım saat sonra kültürdeki bakteri sayısı kaç olur?

» 1,5 saat sonra kültürdeki bakteri sayısı kaç olur?

! Kökün derecesi ↑ n, → Kök sembolü: $\sqrt[n]{a}$

Bilgi Kutusu

$n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$ ve $a, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^n = a$ eşitliğini sağlayan x değerlerine a nın n. kuvvetten kökü denir.

- n çift ise $x = \sqrt[n]{a}$ veya $x = -\sqrt[n]{a}$ tir.
- n tek ise $x = \sqrt[n]{a}$ tir.

Örnek

Karesi 25 olan gerçek sayıları bulalım.

Çözüm

$x^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} \vee x = -\sqrt{25} \Rightarrow x = 5 \vee x = -5$ olur.

! $\sqrt{\ }$ sembolü bir sayının pozitif karekökünü ifade etmek için kullanılır. $a \in \mathbb{R}$ için $\sqrt{a} \geq 0$ dır.

Örnek

Küpü −64 olan gerçek sayıyı bulalım.

Çözüm

$x^3 = -64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} \Rightarrow x = -4$ bulunur.

! $\sqrt{a} \rightarrow$ a nın karekökü
$\sqrt[3]{a} \rightarrow$ a nın küpkökü

Örnek

Aşağıdaki sayıların gerçek sayı olup olmadıklarını belirleyelim.

a) $\sqrt[5]{-32}$ **b)** $\sqrt{12}$ **c)** $\sqrt[4]{-16}$

Çözüm

a) $\sqrt[n]{a}$ ifadesinde n tek iken $a \in \mathbb{R}$ olmalıdır. O hâlde $\sqrt[5]{-32} \in \mathbb{R}$ dir.

b) $\sqrt[n]{a}$ ifadesinde n çift iken $a \geq 0$ olmalıdır. O hâlde $\sqrt{12} \in \mathbb{R}$ dir.

c) $\sqrt[n]{a}$ ifadesinde n çift iken $a \geq 0$ olmalıdır. O hâlde $\sqrt[4]{-16} \notin \mathbb{R}$ dir.

! $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

- $\sqrt[2n+1]{a}$ ifadesinin tanımlı olması için $a \in \mathbb{R}$ olmalıdır.
- $\sqrt[2n]{a}$ ifadesinin tanımlı olması için $a \geq 0$ olmalıdır.

Örnek

$\sqrt{x-4} + \sqrt{7-x}$ ifadesi bir gerçek sayı belirttiğine göre x in değer aralığını bulalım.

Çözüm

$\sqrt{x-4} \in \mathbb{R}$ olması için $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$ olmalıdır.

$\sqrt{7-x} \in \mathbb{R}$ olması için $7 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 7$ olmalıdır.

O hâlde x in değer aralığı [4, 7] dır.

! $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n > 1$ için $\sqrt[n]{0} = 0$ olur.

Sıra Sizde

$\sqrt[3]{x^2 - 2x}$ ifadesinin gerçek sayı belirtmesi için x in değer aralığını bulunuz.

Bilgi Kutusu

$n > 1$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

- n tek ise $\sqrt[n]{x^n} = x$ tir.
- n çift ise $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ tir.

Örnek

Aşağıdaki köklü ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $\sqrt[4]{(-3)^4}$ **b)** $\sqrt[5]{(-1)^5}$ **c)** $\sqrt[3]{12^3}$ **ç)** $\sqrt{7^2}$

Çözüm

a) $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$ olur.

b) $\sqrt[5]{(-1)^5} = -1$ olur.

c) $\sqrt[3]{12^3} = 12$ olur.

ç) $\sqrt{7^2} = |7| = 7$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki köklü ifadelerin değerlerini bulunuz.

a. $\sqrt{(-3)^2}$ **b.** $\sqrt[3]{(-2)^3}$ **c.** $\sqrt[6]{(-7)^6}$

Örnek

$\sqrt{(-6)^2} - \sqrt[5]{(-2)^5} - \sqrt[10]{(-1)^{10}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\sqrt{(-6)^2} - \sqrt[5]{(-2)^5} - \sqrt[10]{(-1)^{10}} = |-6| - (-2) - |-1|$$
$$= 6 + 2 - 1 = 7 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $x < 0 < y$ olmak üzere $\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{(x-y)^2} + \sqrt{y^2}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$x < 0$, $x - y < 0$, $y > 0$ olduğundan

$$\sqrt[3]{x^3} + \sqrt{(x-y)^2} + \sqrt{y^2} = x + |x - y| + |y|$$
$$= x + (-x + y) + y$$
$$= x - x + y + y = 2y \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$0 < x < 2$ olmak üzere $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt[6]{x^6}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Örnek

16 sayısının hangi kuvvetinin 4 sayısına eşit olduğunu bulalım.

Çözüm

$16^x = 4$ eşitliğini sağlayan x sayısını bulmalıyız.

$16^x = 4 \Rightarrow (4^2)^x = 4 \Rightarrow 4^{2x} = 4^1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ bulunur.

Yani $16^{\frac{1}{2}} = 4$ olur.

Bilgi Kutusu

$m, n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$ ve $x \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ tir.

! Her köklü sayı bir üslü sayı belirtir.

Örnek

Aşağıdaki üslü ifadeleri köklü ifade şeklinde yazalım ve değerlerini bulalım.

a) $\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ **b)** $2^{\frac{4}{3}}$ **c)** $9^{\frac{1}{2}}$ **ç)** $8^{\frac{2}{3}}$

Çözüm

a) $\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$ olur.

b) $2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$ olur.

c) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ olur.

ç) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$ olur.

Sıra Sizde

$\sqrt[3]{4^2}$, $\sqrt[10]{7^5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^5}$ ifadelerini üslü ifade şeklinde yazınız.

Örnek

$7\sqrt{75} + 2\sqrt{12} - 5\sqrt{27}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$7\sqrt{75} + 2\sqrt{12} - 5\sqrt{27} = 7\sqrt{25 \cdot 3} + 2\sqrt{4 \cdot 3} - 5 \cdot \sqrt{9 \cdot 3}$$
$$= 7 \cdot 5\sqrt{3} + 2 \cdot 2\sqrt{3} - 5 \cdot 3\sqrt{3}$$
$$= (35 + 4 - 15)\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

! $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$, $a \in \mathbb{R}^+$ ve $x, y, z \in \mathbb{R}$ için $x\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} - z\sqrt[n]{a} = (x+y-z)\sqrt[n]{a}$ tir.

Örnek

$2\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$2 \cdot \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = 2 \cdot \sqrt[3]{8 \cdot 2} + \sqrt[3]{27 \cdot 2}$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 3 \cdot \sqrt[3]{2} = 7 \cdot \sqrt[3]{2} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$2\cdot\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{24}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Örnek

$n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$ ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x\cdot y}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y} = x^{\frac{1}{n}}\cdot y^{\frac{1}{n}} = (x\cdot y)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x\cdot y}$ olur.

Bilgi Kutusu

$n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$ ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x\cdot y}$ tir.

Örnek

$n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$ ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ olur.

Bilgi Kutusu

$n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$ ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$ tir.

Örnek

$m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ ve $x \in \mathbb{R}^+$ için $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$(\sqrt[n]{x})^m = (x^{\frac{1}{n}})^m = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ olur.

Bilgi Kutusu

$m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ ve $x \in \mathbb{R}^+$ için $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$ tir.

Örnek

$m \in \mathbb{Z}$, n, $k \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$ ve $x \in \mathbb{R}^+$ için aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot k]{x^{m \cdot k}}$ **b)** $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[\frac{n}{k}]{x^{\frac{m}{k}}}$

Çözüm

a) $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m \cdot k}{n \cdot k}} = \sqrt[n \cdot k]{x^{m \cdot k}}$ olur. **b)** $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{\frac{m}{k}}{\frac{n}{k}}} = \sqrt[\frac{n}{k}]{x^{\frac{m}{k}}}$ olur.

Bilgi Kutusu

$m \in \mathbb{Z}$, n, $k \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$ ve $x \in \mathbb{R}^+$ için

$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot k]{x^{m \cdot k}} = \sqrt[\frac{n}{k}]{x^{\frac{m}{k}}}$ tir.

Örnek

$n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$ ve x, $y \in \mathbb{R}^+$ için $\sqrt[n]{x^n \cdot y} = x \cdot \sqrt[n]{y}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$\sqrt[n]{x^n \cdot y} = (x^n \cdot y)^{\frac{1}{n}} = x^{n \cdot \frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}} = x \cdot y^{\frac{1}{n}} = x \cdot \sqrt[n]{y}$ olur.

! $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$

Bilgi Kutusu

$n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$ ve x, $y \in \mathbb{R}^+$ için $\sqrt[n]{x^n \cdot y} = x \cdot \sqrt[n]{y}$ tir.

Örnek

m, $n \in \mathbb{Z}^+$, $m > 1$, $n > 1$ ve $x \in \mathbb{R}^+$ için $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m]{x^{\frac{1}{n}}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot x^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$ olur.

! Kök dışındaki bir ifade kök içine alınırken ifadenin üssü kökün derecesi ile çarpılır.

Bilgi Kutusu

m, $n \in \mathbb{Z}^+$, $m > 1$, $n > 1$ ve $x \in \mathbb{R}^+$ için $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m.n]{x}$ tir.

Örnek

$\dfrac{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{3}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$\dfrac{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{9\cdot 27}{3}} = \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^3\cdot 3} = 3\cdot\sqrt[3]{3}$ bulunur.

Örnek

$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[5]{a^4}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[5]{a^4} = \sqrt[3\cdot 5]{a^{2\cdot 5}}\cdot\sqrt[5\cdot 3]{a^{4\cdot 3}} = \sqrt[15]{a^{10}}\cdot\sqrt[15]{a^{12}} = \sqrt[15]{a^{10}\cdot a^{12}}$

$= \sqrt[15]{a^{15}\cdot a^7} = a\cdot\sqrt[15]{a^7}$ bulunur.

! Kök dereceleri farklı olan ifadelerle çarpma, bölme işlemleri yapmak için kök dereceleri eşitlenmelidir.

Örnek

$\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[6]{4}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[6]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[3\cdot 4]{2^{4\cdot 4}}}{\sqrt[4\cdot 3]{2^{3\cdot 3}}\cdot\sqrt[6\cdot 2]{2^{2\cdot 2}}} = \dfrac{\sqrt[12]{2^{16}}}{\sqrt[12]{2^9}\cdot\sqrt[12]{2^4}}$

$= \sqrt[12]{\dfrac{2^{16}}{2^9\cdot 2^4}} = \sqrt[12]{2^{16-9-4}} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[4]{2}$ bulunur.

! Kök dereceleri, derecelerin en küçük ortak katında eşitlenir.

Sıra Sizde

$\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt[5]{2}}{\sqrt[10]{16}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Örnek

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{3}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{3}} = \sqrt[3\cdot 3]{3^2\cdot\sqrt[4]{3}} = \sqrt[9]{\sqrt[4]{3^{2\cdot 4}\cdot 3}} = \sqrt[9\cdot 4]{3^9} = \sqrt[36]{3^9} = \sqrt[4]{3}$ bulunur.

Sıra Sizde

$a = \sqrt{\sqrt[3]{4}}$ olduğuna göre $\sqrt[3]{8}$ in a türünden eşitini bulunuz.

Örnek

Aşağıdaki ifadelerin paydalarını rasyonel yapalım.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Çözüm

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$ bir rasyonel sayı olduğu için $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ifadesini $\sqrt{3}$ sayısı ile genişletmeliyiz.

$$\underset{(\sqrt{3})}{\dfrac{2}{\sqrt{3}}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \text{ olur.}$$

b) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ bir rasyonel sayı olduğu için $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ifadesini $\sqrt[3]{2^2}$ sayısı ile genişletmeliyiz.

$$\underset{(\sqrt[3]{2^2})}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \dfrac{1\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2} \text{ olur.}$$

c) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{2}) = 5 - 2 = 3$ bir rasyonel sayı olduğu için $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ ifadesini $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ sayısı ile genişletmeliyiz.

$$\underset{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5-2} = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3} \text{ olur.}$$

> **!** Çarpımı rasyonel sayı olan iki ifade birbirinin eşleniğidir.

> **!** $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a$
> $(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a - b$

> **!** $(a - b)\cdot(a + b) = a^2 - b^2$

Örnek

$\dfrac{6}{\sqrt{3}} + \dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$\underset{(\sqrt{3})}{\dfrac{6}{\sqrt{3}}} + \underset{(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} + \dfrac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{6-3}$$

$$= 2\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{3} = \sqrt{6} + 3\sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$\dfrac{4}{3-\sqrt{3}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Örnek

$\sqrt{8+2\sqrt{12}}$ ifadesini $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ şeklinde yazalım.

Çözüm

$$\sqrt{8+2\sqrt{12}} = \sqrt{6+2+2\sqrt{6\cdot 2}}$$
$$= \sqrt{6+2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+2}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{6})^2+2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} = \left|\sqrt{6}+\sqrt{2}\right| = \sqrt{6}+\sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

! $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Bilgi Kutusu

$\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ biçimindeki köklü ifadelerde $a = x + y$ ve $b = x\cdot y$ olmak üzere $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ $(x > y)$ şeklinde yazılır.

Örnek

$\sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

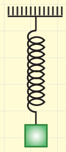
$$\sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{3+\sqrt{4\cdot 2}} - \sqrt{3-\sqrt{4\cdot 2}}$$

$$\sqrt{\underset{\substack{\downarrow\\1+2}}{3}+2\sqrt{\underset{\substack{\downarrow\\1\cdot 2}}{2}}} - \sqrt{\underset{\substack{\downarrow\\1+2}}{3}-2\sqrt{\underset{\substack{\downarrow\\1\cdot 2}}{2}}} = (\sqrt{2}+\sqrt{1}) - (\sqrt{2}-\sqrt{1}) = 2 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$\sqrt{6+\sqrt{20}}$ ifadesini $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ şeklinde yazınız.

Köklü İfade İçeren Denklemler



Yay sarkacı, serbest durumda bulunan esnek bir yayın ucuna bir cismin asılması ile oluşan sistemdir. Bu cisim basit harmonik hareket yapıyorsa hareketin periyodu $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ denklemi ile hesaplanır. (k: Yay sabiti (N/m) ve m: kütle (kg))

Yay sabiti 60 N/m olan bir yaya bir cisim asılarak t = 0 anında denge konumunda iken basit harmonik hareket yapması sağlanıyor.

» Yaya kaç kilogram kütleli bir cisim asılırsa hareketin periyodu 3 saniye olur? ($\pi = 3$ alınız.)

Bir devir süresince geçen süreye **periyot** denir.

Bilgi Kutusu

Değişkenin kök içinde yer aldığı denklemlere **köklü denklemler** denir.

Örnek

$\sqrt{x} + 4 = 10$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\sqrt{x} + 4 = 10 \Rightarrow \sqrt{x} = 6 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 6^2 \Rightarrow x = 36$ bulunur.

$x = 36$ değerini $\sqrt{x} + 4 = 10$ denkleminde yerine yazalım.

$\sqrt{36} + 4 = 6 + 4 = 10$ olup $x = 36$ denklemi sağlar.

O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi {36} dır.

Köklü ifade içeren denklemlerin çözümünden elde edilen değerin başlangıçtaki denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir.

Örnek

$\sqrt{4^{x+2}} = (\sqrt[3]{16})^{x+1}$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\sqrt{4^{x+2}} = (\sqrt[3]{16})^{x+1} \Rightarrow 4^{\frac{x+2}{2}} = 16^{\frac{x+1}{3}} \Rightarrow 4^{\frac{x+2}{2}} = 4^{2\left(\frac{x+1}{3}\right)}$

$\Rightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{2(x+1)}{3} \Rightarrow 3x + 6 = 4x + 4 \Rightarrow x = 2$ olur.

$x = 2 \Rightarrow \sqrt{4^{2+2}} = (\sqrt[3]{16})^{2+1} \Rightarrow \sqrt{4^4} = \left(\sqrt[3]{4^2}\right)^3 \Rightarrow 16 = 16$ olup $x = 2$ denklemi sağlar. O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi {2} dir.

Örnek

$\sqrt{x^2 - 3} = x - 3$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\sqrt{x^2 - 3} = x - 3 \Rightarrow x^2 - 3 = (x - 3)^2 \Rightarrow x^2 - 3 = x^2 - 6x + 9$

$\Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2$ olur.

$x = 2 \Rightarrow \sqrt{2^2 - 3} = 2 - 3 \Rightarrow 1 \neq -1$ olup $x = 2$ denklemi sağlamaz. O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi $\varnothing$ dir.

Örnek

$\sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3\sqrt{x}}$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \sqrt[6]{\sqrt{3^2 \cdot x}} \Rightarrow \sqrt[6]{12} = \sqrt[12]{9x}$

$\Rightarrow \sqrt[6\cdot 2]{12^2} = \sqrt[12]{9x} \Rightarrow \sqrt[12]{144} = \sqrt[12]{9x}$

$\Rightarrow 9x = 144 \Rightarrow x = 16$ bulunur.

$x = 16 \Rightarrow \sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3\sqrt{16}} \Rightarrow \sqrt[6]{12} = \sqrt[6]{12}$ olup $x = 16$ denklemi sağlar. O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi $\{16\}$ dır.

Örnek

$9^{\sqrt{x+2}} - 3^{\sqrt{x+2}+3} = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$9^{\sqrt{x+2}} - 3^{\sqrt{x+2}+3} = 0 \Rightarrow 3^{2\sqrt{x+2}} = 3^{\sqrt{x+2}+3} \Rightarrow 2\sqrt{x+2} = \sqrt{x+2} + 3$

$\Rightarrow \sqrt{x+2} = 3 \Rightarrow x + 2 = 9 \Rightarrow x = 7$ olur.

$x = 7 \Rightarrow 9^{\sqrt{7+2}} - 3^{\sqrt{7+2}+3} = 9^3 - 3^6 = 3^6 - 3^6 = 0$ olup $x = 7$ denklemi sağlar. O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi $\{7\}$ dir.

Sıra Sizde

$\frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{6}{\sqrt{18x+9}} = 1$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

1. $\sqrt{(-7)^2} + \sqrt[5]{(-6)^5} + \sqrt[4]{2^4}$ işleminin sonucu kaçtır?

2. Aşağıda verilen üslü ifadelerin değerini bulunuz.

a) $16^{\frac{3}{2}}$ **b)** $32^{\frac{6}{5}}$ **c)** $27^{\frac{2}{3}}$ **ç)** $12^{\frac{3}{2}}$

3. Aşağıda verilen ifadelerin paydalarını rasyonel yapınız.

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$ **c)** $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

4. $2\sqrt{75} - \sqrt{32} + 3\sqrt{50} + 3\sqrt{108}$ işleminin sonucunu bulunuz.

5. $\dfrac{\sqrt{0,68} + \sqrt{1,53}}{\sqrt{272}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

6. $\sqrt{16 + 6\sqrt{7}} - \sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

7. $\sqrt{\dfrac{20^6 - 10^6}{10^6 - 5^6}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

8. Basit sarkacın tam bir salınımı için geçen süreye sarkacın periyodu denir. ℓ sarkacın boyunun metre cinsinden değeri ve T periyot olmak üzere $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{9,8}}$ ile hesaplanır. Buna göre

a) Periyodu 1,5 sn olan bir sarkacın boyu kaç metredir?

b) 4,9 metrelik bir sarkacın periyodu nedir?

(π yerine 3 alınız.)

9. $\sqrt{2x+2} - 1 = 3$ denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

10. $\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{\sqrt{4}}} = \sqrt[3]{x}$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

11. $\sqrt[3]{49^{2x-1}} = (\sqrt[3]{7})^{2x}$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

12. $5^{\sqrt{x+3}} - 25^{\sqrt{x+3}-2} = 0$ denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

Sembol ve Gösterimler

%

$\frac{a}{b}$

a : b

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

a : b = c : d

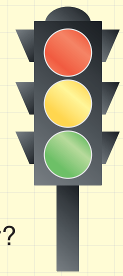
9.3.5. DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER İLE İLGİLİ UYGULAMALAR

İbrahim Bey araç almak için satış temsilcisi ile görüşüyor. Satış temsilcisi İbrahim Bey'in beğendiği iki aracı tanıtırken yakıt tüketimi ile ilgili bilgi veriyor. Araçlardan birinin 25 litre benzinle 280 km yol, diğerinin ise 30 litre benzinle 327 km yol gidebileceğini söylüyor.

İbrahim Bey ekonomik aracı almak isterse hangisini tercih etmelidir?

9.3.5.1. Oran ve Orantı

Gerçek uzunluğu 2 metre 15 cm olan bir trafik lambasının $\frac{1}{43}$ oranında küçültülmüş bir maketi hazırlanacaktır.



» Maket trafik lambasının uzunluğu kaç santimetredir?

Bilgi Kutusu

- En az birisi sıfırdan farklı, aynı birimden iki çokluğun karşılaştırılmasına (bölümüne) **oran** denir. a nın b ye oranı $\frac{a}{b}$ veya a : b şeklinde gösterilir.
- İki ya da fazla oranın birbirine eşitlenmesine **orantı** denir. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ veya a : b = c : d şeklinde ifade edilir.
  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ eşitliğindeki k değerine orantı sabiti,
  b ve c sayılarına içler, a ve d sayılarına dışlar adı verilir.

Örnek

Bir sınıfta 12 kız, 16 erkek öğrenci vardır.

Buna göre aşağıda istenilenleri bulalım.

a) Kız öğrenci sayısının sınıf mevcuduna oranı kaçtır?

b) Kız öğrenci sayısının erkek öğrenci sayısına oranı kaçtır?

c) Erkek öğrenci sayısının sınıf mevcuduna oranı kaçtır?

Çözüm

a) $\dfrac{\text{Kız öğrenci sayısı}}{\text{Sınıf mevcudu}} = \dfrac{12}{12+16} = \dfrac{12}{28} = \dfrac{3}{7}$ olur.

b) $\dfrac{\text{Kız öğrenci sayısı}}{\text{Erkek öğrenci sayısı}} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$ olur.

c) $\dfrac{\text{Erkek öğrenci sayısı}}{\text{Sınıf mevcudu}} = \dfrac{16}{12+16} = \dfrac{16}{28} = \dfrac{4}{7}$ olur.

Bilgi Kutusu

Orantının Özellikleri

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$ orantısı için;

1) $a \cdot d = b \cdot c$ dir. Yani içler çarpımı dışlar çarpımına eşittir.

2) $\dfrac{d}{b} = \dfrac{c}{a}$ dır. Yani dışlar kendi arasında yer değiştirebilir.

$\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ dir. Yani içler kendi arasında yer değiştirebilir.

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$ dir. Yani eşitliğin iki tarafının çarpma işlemine göre tersi alınabilir.

3) $\dfrac{a+c}{b+d} = k$ dir. Yani oranların paylarının toplamı, paydalarının toplamına bölünürse orantı sabiti değişmez.

$m \neq 0$ ve $n \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{a}{b}$ kesri m ile genişletilip, $\dfrac{c}{d}$ kesri n ile genişletilir ise $\dfrac{m \cdot a + n \cdot c}{m \cdot b + n \cdot d} = k$ olur.

4) $\dfrac{a \cdot c}{b \cdot d} = k^2$ dir. Yani oranlar çarpılırsa orantı sabitinin karesi elde edilir.

! Altın oran, doğada birçok canlı ve cansız varlığın yapısında bulunan özel bir orandır. Bu oran 1,6180339887... şeklindedir.

Altın oran deniz kabuklarında, insan vücudunda, kar kristallerinde, kozalaklarda, ağaç dallarında, ay çekirdeğinde, DNA'nın yapısında vb. görülür.

Altın oran eski Mısırlılar ve Yunanlılar tarafından keşfedilmiş, mimaride ve sanatta kullanılmıştır.

Örnek

a, b, c sayıları sırası ile 2, 3 ve 5 ile orantılıdır.

a + b + c = 30 olduğuna göre a, b ve c değerlerini bulalım.

Çözüm

$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k$ dir. Bu durumda a = 2k, b = 3k ve c = 5k olur.

$a + b + c = 30 \Rightarrow 2k + 3k + 5k = 30 \Rightarrow 10k = 30 \Rightarrow k = 3$ bulunur.

O hâlde $a = 2k = 2 \cdot 3 = 6$, $b = 3k = 3 \cdot 3 = 9$, $c = 5k = 5 \cdot 3 = 15$ olur.

Örnek

$\frac{3}{a} = \frac{4}{b}$ ve b + 2a = 40 olduğuna göre a nın değerini bulalım.

Çözüm

$\frac{3}{a} = \frac{4}{b} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = k$ dir. O hâlde a = 3k ve b = 4k olur.

$b + 2a = 40 \Rightarrow 4k + 2 \cdot 3k = 40 \Rightarrow 10k = 40 \Rightarrow k = 4$ bulunur.

Buradan $a = 3k = 3 \cdot 4 = 12$ bulunur.

Örnek

a, b, c pozitif tam sayılar ve $\frac{a}{b} = 2$, $\frac{b}{c} = \frac{2}{3}$ olduğuna göre

a + b + c nin en küçük değerini bulalım.

Çözüm

$\frac{a}{b} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$ olur. $\frac{a}{b} = \frac{4}{2}$ ve $\frac{b}{c} = \frac{2}{3}$ olduğundan

a = 4k, b = 2k, c = 3k olur.

a + b + c nin en küçük değeri için k = 1 alınmalıdır.

Buradan $a + b + c = 4k + 2k + 3k = 9k = 9 \cdot 1 = 9$ bulunur.

Örnek

a, b, c ve d gerçek sayılar olmak üzere $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3}{5}$ olduğuna göre

$\frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\frac{a}{b} = \frac{b}{d} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{9}{25}$ bulunur.

Örnek

a, b, c, d, e ve f sıfırdan gerçek sayılar olmak üzere $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{3}{4}$ orantısında $3a + 2c - e = 12$ ve $2d - f = 4$ olduğuna göre b değerini bulalım.

Çözüm

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3a + 2c - e}{3b + 2d - f} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{3b + 4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 48 = 9b + 12$$

$$\Rightarrow 36 = 9b$$

$$\Rightarrow b = 4 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = 3$ olmak üzere $\frac{a \cdot d \cdot e}{b \cdot c \cdot f}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Örnek

Bir araç 100 km yolda 9 litre benzin yakıyor.

Aracın 200 km, 300 km, 400 km ve 500 km yol aldığında kaç litre benzin yakacağını bulalım.

Çözüm

Araç her 100 km de 9 litre benzin yaktığı için 200 km de 18 lt, 300 km de 27 lt, 400 km de 36 lt ve 500 km de 45 lt benzin yakar. Tablo üzerinden görüldüğü gibi aracın aldığı yol arttıkça yaktığı benzin de artmaktadır.

Aracın Aldığı Yol (km)	100	200	300	400	500
Aracın Yaktığı Benzin (L)	9	18	27	36	45

Bilgi Kutusu

İki çokluktan biri artarken diğeri aynı oranda artıyorsa ya da biri azalırken diğeri aynı oranda azalıyorsa bu iki çokluk doğru orantılıdır. $k > 0$ olmak üzere x ile y doğru orantılı ise $\frac{x}{y} = k$ dir.

Örnek

Dilek Hanım'ın 6, 8 ve 12 yaşlarında üç çocuğu vardır. Dilek Hanım, 52 TL yi üç çocuğuna yaşları ile doğru orantılı olarak paylaştırıyor.

Her birine kaç lira harçlık düşeceğini bulalım.

Çözüm

6 yaşında olan çocuğun alacağı harçlık miktarı a, 8 yaşında olan çocuğun alacağı harçlık b, 12 yaşında olan çocuğun alacağı harçlık miktarı c olsun.

Çocukların alacağı harçlık miktarı yaşlarıyla doğru orantılı olacağından

$\frac{a}{6} = \frac{b}{8} = \frac{c}{12} = k$ olur.

O hâlde a = 6k, b = 8k ve c = 12k dir. Dilek Hanım'ın çocuklarına dağıtacağı para 52 TL olduğundan a + b + c = 52 olur.

$a + b + c = 52 \Rightarrow 6k + 8k + 12k = 52 \Rightarrow 26k = 52 \Rightarrow k = 2$ bulunur.

6 yaşında olan çocuk $a = 6k = 6 \cdot 2 = 12$ TL,

8 yaşında olan çocuk $b = 8k = 8 \cdot 2 = 16$ TL,

12 yaşında olan çocuk $c = 12k = 12 \cdot 2 = 24$ TL harçlık alır.

Örnek

x – 2 ile y + 5 doğru orantılı iki çokluk olmak üzere x = 4 iken y = –1 olduğuna göre y = 2 iken x in değerini bulalım.

Çözüm

x – 2 ile y + 5 doğru orantılı ise $\frac{x-2}{y+5} = k$ dir.

x = 4 iken y = –1 ise $\frac{4-2}{-1+5} = k \Rightarrow k = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ olur.

y = 2 ve $k = \frac{1}{2}$ olduğundan

$\frac{x-2}{2+5} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 4 = 7 \Rightarrow 2x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{2}$ bulunur.

Sıra Sizde

Kek yapılması için gerekli olan un, şeker ve süt miktarları sırasıyla 5, 2 ve 1 sayıları ile doğru orantılıdır.

400 gram un kullanılan bir kekte kaç gram şeker ve süt kullanılacağını bulunuz.

Bilgi Kutusu

a, b, c ve x gerçek sayılar olmak üzere a ile b ve c ile x arasında doğru orantı varsa

a ⤡ b
c ⤢ x

$b \cdot c = a \cdot x$ olur.

Örnek

Mehmet Usta 4 odayı 6 saatte boyamaktadır.

Mehmet Usta'nın aynı büyüklükte 18 odayı kaç saatte boyayacağını bulalım.

Çözüm

Boyanacak oda sayısı arttıkça boyama süresi de artacaktır. Bu nedenle oda sayısı ile boyama süresi doğru orantılıdır.

4 oda ⟶ 6 saatte boyanırsa
18 oda ⟶ x saatte boyanır

$4 \cdot x = 6 \cdot 18 \Rightarrow x = 27$ olur.

O hâlde Mehmet Usta 18 odayı 27 saatte boyar.

Örnek

Bir grup arkadaş çadır kurarak kamp yapacaktır. Bunun için yola çıkarken yanlarına 1 kişiye 60 gün yetecek kadar yiyecek almışlardır.

Yanlarındaki yiyeceğin 3 kişiye ne kadar yeteceğini bulalım.

Çözüm

1 kişiye 60 gün yetecek kadar yiyecek vardır. O hâlde 3 kişiye bu yiyecek 20 gün kadar yeter. Kişi sayısı arttıkça yiyeceğin yeteceği gün sayısı azalmıştır.

Bilgi Kutusu

İki çokluktan biri azalırken diğeri aynı oranda artıyorsa ya da biri artarken diğeri aynı oranda azalıyorsa bu iki çokluk ters orantılıdır.

$k > 0$ olmak üzere y ile x ters orantılı ise $y \cdot x = k$ tir.

Örnek

47 tane cevizi 3 çocuk, yaşları ile ters orantılı olacak şekilde paylaşacaklardır.

Çocuklar 6, 8 ve 10 yaşlarında olduğuna göre büyük olan çocuğun kaç tane ceviz alacağını bulalım.

Çözüm

6, 8 ve 10 yaşlarındaki çocukların aldıkları ceviz sayıları sırası ile a, b ve c olmak üzere $6a = 8b = 10c = k$ olur.

Buradan $a = \frac{k}{6}$, $b = \frac{k}{8}$ ve $c = \frac{k}{10}$ olur.

$$a + b + c = 47 \Rightarrow \underset{(20)}{\frac{k}{6}} + \underset{(15)}{\frac{k}{8}} + \underset{(12)}{\frac{k}{10}} = 47$$

$$\Rightarrow \frac{20k + 15k + 12k}{120} = 47$$

$$\Rightarrow 47k = 47 \cdot 120 \Rightarrow k = 120 \text{ bulunur.}$$

Büyük olan çocuk $\frac{k}{10} = \frac{120}{10} = 12$ tane ceviz alır.

Örnek

Bir yağ fabrikasında çalışan dört işçi 231 teneke yağ taşımışlardır. Çınar ile Deniz'in taşıdığı teneke sayısı sırası ile 3 ve 4 ile doğru, Özgür ve Barış'ın taşıdığı teneke sayısı sırası ile 2 ve 5 ile ters orantılıdır.

İşçilerden her birinin taşıdığı teneke sayısını bulalım.

Çözüm

Çınar, Deniz, Özgür ve Barış'ın taşıdığı teneke sayısı sırası ile a, b, c ve d olsun.

O hâlde $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = c \cdot 2 = d \cdot 5 = k$ olur.

Buradan, $a = 3k$, $b = 4k$, $c = \frac{k}{2}$ ve $d = \frac{k}{5}$ olur.

$$a + b + c + d = 231 \Rightarrow 3k + 4k + \frac{k}{2} + \frac{k}{5} = 231$$

$$\Rightarrow 30k + 40k + 5k + 2k = 231 \cdot 10$$

$$\Rightarrow 77k = 2310 \Rightarrow k = 30 \text{ bulunur.}$$

O hâlde Çınar $3k = 3 \cdot 30 = 90$ teneke; Deniz $4k = 4 \cdot 30 = 120$ teneke; Özgür $\frac{k}{2} = \frac{30}{2} = 15$ teneke; Barış $\frac{k}{5} = \frac{30}{5} = 6$ teneke yağ taşımışlardır.

Örnek

a + 2 sayısı ile 2b + 2 sayısı ters orantılı iki çokluk olmak üzere a = 2 için b = 4 olduğuna göre a = 8 için b nin değerini bulalım.

Çözüm

a + 2 ile 2b + 2 ters orantılı olduğundan $(a + 2)\cdot(2b + 2) = k$ olur.

$a = 2$, $b = 4$ için $(2 + 2)\cdot(2\cdot4 + 2) = k \Rightarrow k = 40$ bulunur.

$a = 8$, $k = 40$ için $(8 + 2)\cdot(2b + 2) = 40 \Rightarrow 2b + 2 = 4 \Rightarrow b = 1$ olur.

Sıra Sizde

Kemal, Mert ve Hasan isimli üç arkadaş 130 tane bilyeyi sırasıyla 2, 3 ve 4 ile ters orantılı olacak şekilde paylaşmışlardır.

Her birinin kaç bilye aldığını hesaplayınız.

Bilgi Kutusu

a, b, c ve x gerçek sayılar olmak üzere a ile b ve c ile x arasında ters orantı varsa

$a \longleftrightarrow b$

$c \longleftrightarrow x$

$a.b = c.x$ olur.

Örnek

Sinem bir yolu saatte 80 km/sa. hız yapan bir otobüs ile 6 saatte gidiyor. Sinem aynı yolu başka bir otobüs ile 8 saatte döndüğüne göre otobüsün dönüşteki hızının saatte kaç kilometre olduğunu bulalım.

Çözüm

80 km/sa hızla ⟷ 6 saatte gidiyor

x ⟷ 8 saatte dönüyor

$8\cdot x = 80\cdot 6 \Rightarrow x = 60$ olur.

O hâlde otobüsün dönüşteki hızı 60 km/sa. tir.

1. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ ve $x + y + z = 27$ ise y kaçtır?

2. 39 kişilik bir sınıfta kız öğrencilerin sayısı 7, erkek öğrencilerin sayısı 6 ile orantılıdır.
Kız ve erkek öğrencilerin sayısını bulunuz.

3. Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri 3, 5, 7 ile orantılıdır.
Bu üçgenin en büyük dış açısının ölçüsünü bulunuz.

4. a ve b sayıları ters orantılı olduğuna göre yandaki tabloyu tamamlayınız.

a	2	3	4	6	8	12	18	24
b	36		18					

5. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{4}{5}$ olduğuna göre $\left(\frac{a+b}{a}\right) \cdot \left(\frac{d-c}{c}\right)$ kaçtır?

6. Bir çita 120 metreyi 4,1 saniyede, bir antilop 50 metreyi 2,1 saniyede koşabilmektedir.
Hangisinin daha hızlı olduğunu bulunuz.

7. x sayısı y ile doğru, z ile ters orantılıdır. x = 3, y = 7 iken z = 4 olduğuna göre x = 4, y = 2 iken z kaçtır?

8. 35 000 m^2 arsası bulunan Cenk Bey arsasını satmak istiyor. Bu arsayı 5 ile doğru, 2 ve 3 ile ters orantılı olacak şekilde 3 parçaya ayırıyor.
Her bir parçanın kaç metrekare olduğunu bulunuz.

9. Mehmet Usta, bir kalası 5 parçaya 16 dakikada bölebiliyorsa aynı kalası Mehmet Usta’nın 7 parçaya kaç dakikada bölebileceğini bulunuz.

9.3.5.2. Denklemler ve Eşitsizlikler ile İlgili Problemler

Mustafa, Sanem ve Ebru'nun yaşları ile ilgili aşağıdakiler biliniyor.

- Yaşları iki basamaklı birer tam sayıdır.
- Mustafa'nın yaşını oluşturan iki rakam yer değiştirince Sanem'in yaşını vermektedir.
- Mustafa ile Sanem'in yaşlarının toplamı Ebru'nun yaşının 11 katıdır.
- Sanem'in yaşı Ebru'nun yaşının 4 katıdır.

» Mustafa, Sanem ve Ebru'nun yaşlarını bulunuz.

! Problem çözmede kavrama ve anlama önemlidir.

! Problemlerin çözümünde matematiksel ifadeleri kullanabilmek için cebirsel ifadelerden faydalanılabilir.

Bilgi Kutusu

Problem, çözülmesi gereken mesele, soru, sorun veya aşılması gereken bir engeldir. Bir durumun problem olması için bu durumla bireyin ilk kez karşılaşması, çözümünün birey tarafından bilinmiyor olması, bireyin yaşantıları ve deneyimleri ile çözülebilir nitelikte olması gerekir. Bir birey için problem olan durum başka birey için problem olmayabilir.

Problem çözme, sonuç bulmanın yanı sıra bir yol bulma, güçlükten kurtulmadır.

Problem çözme yöntemi, problem olan durumun belirlenerek çözüm yollarının aranması ve problem durumunun aydınlatılması sürecidir.

Örnek

Aşağıda verilen ifadeleri cebirsel olarak yazalım.

a) Ali'nin yaşının 2 katı ile Ömer'in yaşının toplamı 18 dir.

b) Bir sınıftaki erkek öğrencilerin sayısı, kız öğrencilerin sayısının 2 katıdır.

Çözüm

a) Ali'nin yaşı x, Ömer'in yaşı y ise $2x + y = 18$ ile ifade edilir.

b) Erkek öğrenci sayısı x, kız öğrenci sayısı y ise $x = 2y$ ile ifade edilir.

! Problem çözme bireylere araştırma, çözüm üretme, düşünme niteliklerini kazandırır.

Örnek

Aklımızdan bir sayı tutup aşağıdaki işlemleri sırasıyla yapalım. Bu işlemleri matematiksel olarak ifade edelim.

- Tuttuğumuz sayıyı 3 ile çarpalım.
- Sonuca 21 ekleyelim.
- Elde ettiğimiz sonucu 3 e bölelim.
- Bu sonuçtan tuttuğumuz sayıyı çıkaralım.

Çözüm

Aklımızdan tuttuğumuz sayı 10 olsun.

- $10 \cdot 3 = 30$
- $30 + 21 = 51$
- $51 : 3 = 17$
- $17 - 10 = 7$ buluruz.

Aklımızdan hangi sayıyı tutarsak tutalım sonuç 7 olur. Sonucun neden hep 7 olduğunu, ifadeleri matematiksel olarak ifade ederek görebiliriz.

Aklımızdan tuttuğumuz sayı x olsun.

Sayının 3 katı → $3 \cdot x$

Sonucun 21 fazlası → $3 \cdot x + 21$

Bu sonucun 3'e bölümü → $\frac{3 \cdot x + 21}{3}$

Bu sonuçtan tuttuğumuz sayının çıkarılması → $\frac{3 \cdot x + 21}{3} - x$ olur.

Buradan $\frac{3 \cdot x + 21}{3} - x = \frac{21}{3} = 7$ olduğu görülür.

Örnek

Bir sayının 2 katının 4 fazlası ile aynı sayının yarısının toplamı 14 olduğuna göre bu sayıyı bulalım.

Çözüm

Sayı x olsun. Bu sözel ifadeyi $2x + 4 + \frac{x}{2} = 14$ şeklinde yazabiliriz.

$2x + 4 + \frac{x}{2} = 14 \Rightarrow 2x + \frac{x}{2} = 10 \Rightarrow \frac{5x}{2} = 10 \Rightarrow x = 4$ bulunur.

Sıra Sizde

Şükran parasının yarısından 40 TL fazlası ile kazak alıyor. Kalan parasının tamamı ile fiyatı 55 TL olan eteği alıyor. Şükran'ın başlangıçta kaç lirası vardı?

Örnek

Bir sayının $\frac{1}{4}$ inin 2 fazlası, aynı sayının 5 eksiğinin yarısından küçüktür.

Bu sayının alabileceği en küçük tam sayı değerini bulalım.

Çözüm

Sayı x olsun.

$\frac{x}{4} + 2 < \frac{x-5}{2} \Rightarrow \frac{x+8}{4} < \frac{x-5}{2} \Rightarrow x + 8 < 2x - 10 \Rightarrow 18 < x$ olur.

O hâlde x in alabileceği en küçük tam sayı değeri 19 dur.

Örnek

Bir su deposundaki 80 L su her gün 10 L kullanılarak tüketilmiştir.

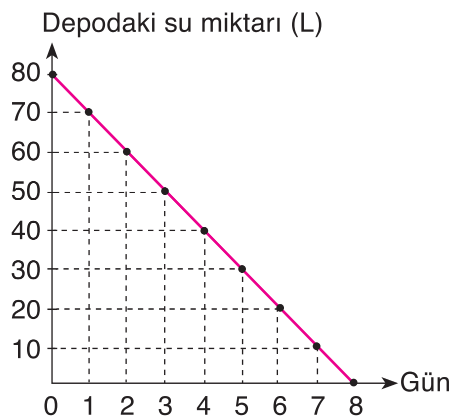
Depodaki suyun günlere göre değişimini gösteren doğrusal grafiği çizelim.

Çözüm

Depodaki su $\frac{80}{10} = 8$ günde tüketilir.

Depodaki suyun günlere göre değişimini gösteren doğrusal grafik aşağıdaki gibi olur.

Grafik: Depodaki Su Miktarının Günlere Göre Değişimi



Örnek

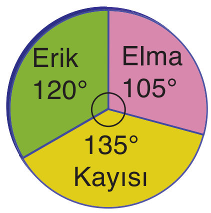
Bir bahçede elma, erik ve kayısı ağaçları vardır. Bahçede 7 elma, 8 erik, 9 kayısı ağacı bulunduğuna göre bu meyve ağaçlarının türlerine göre dağılımını gösteren daire grafiğini çizelim.

Çözüm

Bu bahçede 7 + 8 + 9 = 24 tane ağaç vardır. Bir meyve ağacını gösteren daire dilimin merkez açısının ölçüsü 360° : 24 = 15° olur. Bu durumda elma ağaçlarının sayısını gösteren daire diliminin merkez açısının ölçüsü 7·15° = 105°, erik ağaçlarının sayısını gösteren daire diliminin merkez açısının ölçüsü 8·15° = 120°, kayısı ağaçlarının sayısını gösteren daire diliminin merkez açısının ölçüsü 9·15° = 135° olur.

O hâlde bahçedeki meyve ağaçlarının türlerine göre dağılımını gösteren daire grafiği yandaki gibi olur.

Grafik: Meyve Ağaçlarının Dağılımı



Örnek

Sezen her gün bir önceki günden 10 sayfa fazla okuyarak 250 sayfalık bir romanı 5 günde bitirmiştir.

Sezen'in 5 gün boyunca okuduğu sayfa sayılarını sütun grafiği ile gösterelim.

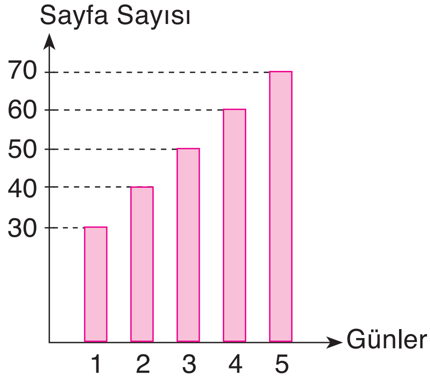
Çözüm

Sezen'in ilk gün okuduğu sayfa sayısı x olsun.

$x + (x + 10) + (x + 20) + (x + 30) + (x + 40) = 250 \Rightarrow x = 30$ olur.

Sezen 1. gün 30, 2. gün 40, 3. gün 50, 4. gün 60, 5. gün 70 sayfa kitap okumuştur. Bu verilere ait sütun grafiği aşağıdaki gibi olur.

Grafik: Günlere Göre Okunan Sayfa Sayısı

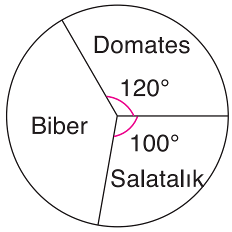


Örnek

Yanda verilen daire grafiği bir çiftçinin ürettiği ürünlerin dağılımını göstermektedir.

Bu çiftçi 30 ton domates ürettiğine göre kaç ton biber ürettiğini bulalım.

Grafik: Çiftçinin Ürettiği Ürünlerin Dağılımı



Çözüm

Biber miktarını gösteren daire diliminin merkez açısının ölçüsü
$360° – (100° + 120°) = 140°$ olur.

1 ton ürünü gösteren daire diliminin merkez açısının ölçüsü
$120° : 30 = 4°$ bulunur. O hâlde çiftçi $140° : 4° = 35$ ton biber üretmiştir.

Örnek

Aykut her ay maaşının $\frac{1}{8}$ ini kiraya, $\frac{2}{5}$ sini ev ve mutfak masraflarına ayırıyor. Her ay 200 TL bir yardım kuruluşuna bağışta bulunan Aykut'un geriye 1700 TL si kalıyor.

Aykut'un maaşının kaç lira olduğunu bulalım.

Çözüm

Aykut'un maaşını adım adım bulalım.

Problemi Anlama: Aykut'un maaşından yaptığı bazı harcamalar ve elinde kalan para miktarı veriliyor. Aykut'un maaşı soruluyor.

Plan Yapma: Aykut'un maaşına x diyelim. Yaptığı harcamaları toplayalım ve maaşından çıkararak 1700 TL ye eşitleyelim. Bu şekilde elde edeceğimiz denklemi çözelim.

Planı Uygulama: Yaptığı harcamalar $\left(\frac{x}{8} + \frac{2x}{5} + 200\right)$ TL ve kalan parası $x - \left(\frac{x}{8} + \frac{2x}{5} + 200\right) = 1700$ TL olur.

$$\underset{(40)}{\frac{x}{1}} - \underset{(5)}{\frac{x}{8}} - \underset{(8)}{\frac{2x}{5}} - 200 = 1700 \Rightarrow \frac{40x - 5x - 16x}{40} = 1900$$

$$\Rightarrow 19x = 1900 \cdot 40 \Rightarrow x = 4000\text{TL dir.}$$

Sonucu Kontrol Etme: Aykut'un maaşını 4000 TL bulduk.

$4000 \cdot \frac{1}{8} = 500$ TL kira, $4000 \cdot \frac{2}{5} = 1600$ TL ev ve mutfak masrafları, 200 TL yardım kuruluşuna bağış yaptığından toplam harcama

$500 + 1600 + 200 = 2300$ TL dir.

O hâlde Aykut'un $4000 – 2300 = 1700$ TL si kalır.

! Problem çözmenin bir sistematiği vardır. Sistematik olarak nitelendirilen bu durum problem çözme sürecini ifade etmektedir. Problem çözme sürecini birçok kişi farklı basamaklarla ifade etmiştir. En çok kabul gören süreç George Polya tarafından verilen süreçtir. Bu sürecin basamakları şu şekildedir:

- Problemin anlaşılması
- Çözümle ilgili stratejinin belirlenmesi (Plan yapma)
- Stratejinin uygulanması (Planı uygulama)
- Çözümün değerlendirilmesidir. (Sonucu kontrol etme)

Bu basamaklara uygun çalışmak, problem çözümünü kolaylaştırır.

Örnek

Gül süt almak için gittiği markette almak istediği belirli bir sütün 1 litrelik kutularının ikili, üçlü ve dörtlü paketler hâlinde satıldığını görüyor. Bu paketlerin fiyatları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Süt Paketleri	Fiyat (TL)
İkili	5,70
Üçlü	8,40
Dörtlü	11,28

Buna göre Gül hangi paketi alırsa daha ekonomik bir alışveriş yapmış olur? Bulalım.

Çözüm

Gül'ün hangi paketi seçerse daha ekonomik bir alışveriş yapmış olacağını adım adım bulalım.

Problemi Anlama: Paketlerdeki süt sayıları ve paketlerin fiyatları verilmiştir. Paketlerdeki her bir süt kutusunun fiyatına göre en uygun paketin hangisi olduğu soruluyor.

Plan Yapma: Paketlerdeki her bir süt kutusunun fiyatını bulalım. Bunun için paketin fiyatını içindeki süt kutusunun sayısına bölmeliyiz. Bulduğumuz bir kutu süt fiyatlarını karşılaştırarak ekonomik tercih yapabiliriz.

Planı Uygulama: İkili paketteki bir kutu sütün fiyatı 5,70 : 2 = 2,85 TL,

Üçlü paketteki bir kutu sütün fiyatı 8,40 : 3 = 2,80 TL,

Dörtlü paketteki bir kutu sütün fiyatı 11,28 : 4 = 2,81 TL dir.

En uygun paketin üçlü paket olduğu görülmektedir.

Sonucu Kontrol Etme: Farklı bir çözüm yolu ile de sonucu kontrol edebiliriz. Paketlerdeki süt kutusu sayılarını eşitleyelim. Her bir pakette 12 kutu olacak şekilde eşitleyelim.

İkili paket 5,70 TL ise 6 tane ikili paket yani
12 kutu süt $6 \cdot 5{,}70 = 34{,}20$ TL dir.

Üçlü paket 8,40 TL ise 4 tane üçlü paket yani
12 kutu süt $4 \cdot 8{,}40 = 33{,}60$ TL dir.

Dörtlü paket 11,28 TL ise 3 tane dörtlü paket yani
12 kutu süt $3 \cdot 11{,}28 = 33{,}84$ TL dir.

Buradan da üçlü paketlerin daha ekonomik olduğu görülmektedir.

Örnek

Bir otobüs birinci duraktan aldığı yolcularla sefere başlıyor. Bundan sonraki her durakta otobüsteki yolcu sayısı kadar yolcu otobüse biniyor, sonra otobüsten 3 kişi iniyor.

Otobüs dördüncü duraktan hareket ettiğinde yolcu sayısı 11 olduğuna göre otobüse birinci duraktan binen yolcu sayısını bulalım.

Çözüm

Bu problemde giriş bilgileri bilinmemekte, sonuç bilgileri bilinmektedir. Bu nedenle bu problemin çözümünde geriye doğru çalışma stratejisini kullanalım.

4. durakta inen yolcuları otobüse bindirelim. 11 + 3 = 14 olduğundan otobüs 3. duraktan hareket ettiğinde içinde 7 yolcu vardır.

3. durakta inen yolcuları otobüse bindirelim. 7 + 3 = 10 olduğundan otobüs 2. duraktan hareket ettiğinde içinde 5 yolcu vardır.

2. durakta inen yolcuları otobüse bindirelim. 5 + 3 = 8 olduğundan otobüs 1. duraktan hareket ettiğinde içinde 4 yolcu vardır.

O hâlde otobüse birinci duraktan binen yolcu sayısı 4 tür.

! Problem çözme stratejileri problemin çözümünü gerçekleştirmek için izlenen yoldur.

Problem çözme stratejilerinin bazıları şunlardır:

- Sistematik liste yapma
- Tahmin ve kontrol
- Diyagram çizme
- Bağıntı bulma
- Değişken kullanma
- Benzer bir problem çözümünden yararlanma
- Geriye doğru çalışma
- Eleme
- Muhakeme etme
- Tablo oluşturma

Örnek

Şule'nin cebinde 40 lira vardır.

Paketi 2,47 lira olan şekerlerden 6, paketi 4,18 lira olan çikolatalardan 5 paket alan Şule'nin parasının yeterli olup olmayacağını bulalım.

Çözüm

Bu problemde tam olarak kaç lira harcadığı sorulmuyor. Şule'nin parasının yeterli olup olmadığı, verilerin en yakın sayıya yuvarlanarak hesaplanması ile bulunabilir. Soruya bu şekilde yaklaşıp sonucu tahmin etmek problemi çözmek için yeterlidir. 2,47 yi 2,5 e; 4,18 i 4 e yuvarlayalım. $2,5 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 15 + 20 = 35$ liradır.

O hâlde Şule'nin parası aldıkları için yeterlidir.

Soruyu çözerek de sonucu kontrol edelim.

$2,47 \cdot 6 + 4,18 \cdot 5 = 14,82 + 20,9 = 35,72$ liradır.

Bu şekilde de Şule'nin parasının yeterli olduğunu görebiliriz.

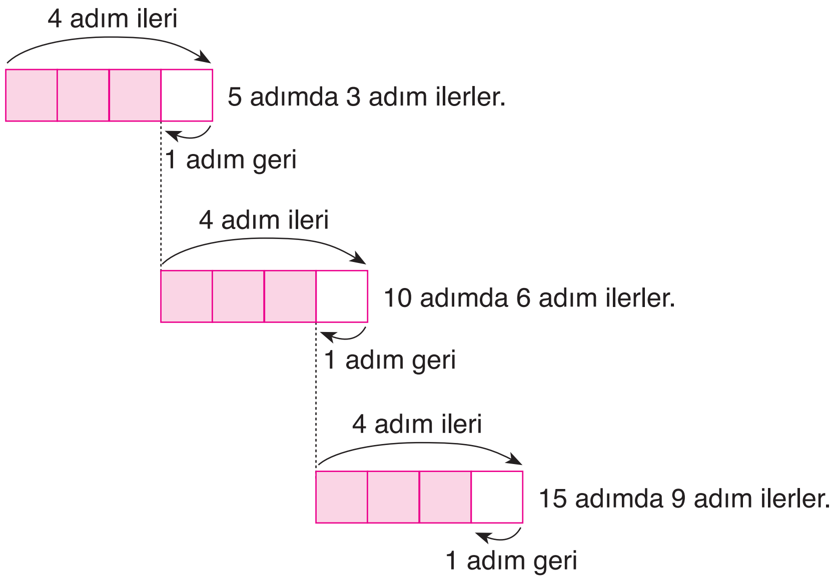
Örnek

Beril doğrusal bir yol boyunca 4 adım ileri 1 adım geri giderek ilerliyor.

Beril başladığı noktadan itibaren kaç adım attığında 9 adım ileride olur? Bulalım.

Çözüm

Her kutu 1 adımı gösterecek şekilde aşağıdaki diyagramı çizerek çözümü görmeyi kolaylaştırabiliriz.



O hâlde Beril başladığı noktadan itibaren 15 adım attığında 9 adım ileride olur.

Örnek

Kenar uzunlukları birer tam sayı olan bir dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğu kısa kenarının uzunluğunun 3 katıdır.

Dikdörtgenin çevresinin uzunluğu 70 cm den küçük olduğuna göre uzun kenarının uzunluğunun en fazla kaç santimetre olacağını bulalım.

Çözüm

Dikdörtgenin kısa kenarının uzunluğuna a dersek uzun kenarının uzunluğu 3a ve çevresi 8a olur.

$8a < 70 \Rightarrow a < 8{,}75$ olur. Buradan a nın alabileceği en büyük tam sayı değeri 8 dir. O hâlde dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğu en fazla $3 \cdot 8 = 24$ cm olur.

Örnek

Bir toptancı kolilerdeki malzemeleri nehrin karşı kıyısındaki depoya kayıkla taşıyacaktır. Kolilerin her birinin kütlesi 10 kg, toptancının kütlesi ise 95 kg dır.

Kayık en fazla 350 kg yük taşıyabileceğine göre bu toptancının kayıkla bir seferde en çok kaç koliyi nehrin karşı kıyısındaki depoya taşıyabileceğini bulalım.

Çözüm

Kütleleri eşit olan kolilerden bir seferde x tane taşınsın.

Toptancının kütlesi + Kolilerin toplam kütlesi $\leq$ 350 olmalıdır.

$95 + 10 \cdot x \leq 350 \Rightarrow 10 \cdot x \leq 255 \Rightarrow x \leq 25{,}5$ olur.

O hâlde kayıkla bir seferde taşınacak koli sayısı en çok 25 tir.

Örnek

Ayla'nın 6 yıl sonraki yaşının 2 katı, 4 yıl önceki yaşının 3 katına eşit olacaktır.

Buna göre Ayla'nın bugünkü yaşını bulalım.

Çözüm

Ayla'nın bugünkü yaşı x olsun. Bu durumda
$2 \cdot (x + 6) = 3 \cdot (x - 4) \Rightarrow 2x + 12 = 3x - 12 \Rightarrow x = 24$ bulunur.

! İki kişinin yaşları arasındaki fark sabittir.

Örnek

Bir babanın yaşı iki çocuğunun yaşları farkının 3 katından 2 fazladır.

5 yıl önce babanın yaşı çocukların yaşları farkının 2 katından 9 fazla olduğuna göre babanın bugünkü yaşını bulalım.

Çözüm

	Babanın Yaşı	Çocukların Yaşları Farkı
Bugün	3x + 2	x
5 yıl önce	3x + 2 – 5	x

Buradan $3x - 3 = 2x + 9 \Rightarrow x = 12$ bulunur.

Babanın bugünkü yaşı $3x + 2 = 3 \cdot 12 + 2 = 38$ olur.

Örnek

Demet ile Esen'in yaşları farkı 14 tür.

Esen, Demet'in yaşına geldiğinde yaşları toplamı 76 olacağına göre Esen'in bugünkü yaşını bulalım.

Çözüm

Esen'in yaşı x ise Demet'in yaşı x + 14 tür. Esen, Demet'in yaşına geldiğinde yani 14 yıl sonra Esen x + 14, Demet x + 28 yaşında olur.

$x + 14 + x + 28 = 76 \Rightarrow 2x = 76 - 42 \Rightarrow x = 17$ olup Esen'in bugünkü yaşı 17 dir.

Örnek

İki kardeşin yaşları oranı $\frac{5}{3}$ tür.

Küçük kardeş doğduğunda büyük kardeş 14 yaşında olduğuna göre büyük kardeşin bugünkü yaşını bulalım.

Çözüm

Büyük kardeş 5k, küçük kardeş 3k yaşındadır. Aralarındaki yaş farkı 14 olduğundan $5k - 3k = 14 \Rightarrow k = 7$ bulunur. O hâlde büyük kardeşin bugünkü yaşı $5k = 5 \cdot 7 = 35$ olur.

Örnek

Bir babanın yaşı ikişer yıl arayla doğmuş üç çocuğunun yaşlarının toplamına eşittir.

10 yıl sonra babanın yaşı büyük çocuğunun yaşının 2 katına eşit olacağına göre küçük çocuk doğduğunda babanın kaç yaşında olduğunu bulalım.

Çözüm

Çocukların yaşları x, x + 2, x + 4 olsun.

Bu durumda babanın yaşı $x + x + 2 + x + 4 = 3x + 6$ olur. 10 yıl sonra babanın yaşı 3x + 16, büyük çocuğun yaşı x + 14 olur.

$3x + 16 = 2 \cdot (x + 14) \Rightarrow 3x + 16 = 2x + 28 \Rightarrow x = 12$ olup küçük çocuğun yaşı 12, babanın yaşı $3x + 6 = 42$ olur.

O hâlde küçük çocuk doğduğunda baba $42 - 12 = 30$ yaşındaydı.

Örnek

Mehmet, Ahmet ve Emre'nin yaşları ile ilgili olarak aşağıdakiler bilinmektedir.

- Emre'nin 3 yıl sonraki yaşı, Mehmet'in 2 yıl önceki yaşına eşit olacaktır.
- Emre'nin 4 yıl sonraki yaşı, Ahmet'in şimdiki yaşına eşit olacaktır.
- Üçünün 2 yıl sonraki yaşlarının toplamı 24 olacaktır.

Buna göre Ahmet'in bugünkü yaşını bulalım.

Çözüm

Mehmet'in bugünkü yaşı x, Ahmet'in bugünkü yaşı y, Emre'nin bugünkü yaşı z olsun.

$z + 3 = x - 2 \Rightarrow x = z + 5,\ z + 4 = y$ ve

$x + 2 + y + 2 + z + 2 = 24 \Rightarrow x + y + z = 18$ olur.

$x + y + z = 18 \Rightarrow z + 5 + z + 4 + z = 18 \Rightarrow 3z = 9 \Rightarrow z = 3$ olur.

Ahmet'in bugünkü yaşı $y = z + 4 = 3 + 4 = 7$ bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki tabloda Kemal, Sinan ve Sevgi'nin yıllara göre yaşlarına ait bazı bilgiler verilmiştir.

Yıllar	Kemal	Sinan	Sevgi
2008	x	y – 3	
2012	3x – 6		2z – 1
2016		2y – 9	3z – 4

Buna göre Kemal, Sinan ve Sevgi'nin 2016 yılındaki yaşlarının toplamını bulunuz.

BAY X'İN YAŞI

Bay X'in yaşı iki basamaklıdır ve tersten yazılıp kendisiyle toplandığında elde edilen sonuç bir sayının karesidir.

Bay X'in yaşı en az kaç olabilir?

Örnek

%10 fazlası 154 olan sayının %10 eksiğini bulalım.

Çözüm

Sayı x olsun. x in %10 fazlası

$x + x \cdot \frac{10}{100} = 154 \Rightarrow \frac{11x}{10} = 154 \Rightarrow x = 140$ olur.

140 sayısının %10 eksiği $140 - 140 \cdot \frac{10}{100} = 126$ olur.

Örnek

Bir okuldaki kız öğrencilerin sayısının %25 i, erkek öğrencilerin sayısının %20 sine eşittir.

Okulda 324 öğrenci olduğuna göre erkek öğrenci sayısını bulalım.

Çözüm

Erkek öğrencilerin sayısı x, kız öğrencilerin sayısı y olsun.

$y \cdot \frac{25}{100} = x \cdot \frac{20}{100} \Rightarrow 5y = 4x \Rightarrow y = \frac{4x}{5}$ olur.

$x + y = 324 \Rightarrow x + \frac{4x}{5} = 324 \Rightarrow \frac{9x}{5} = 324 \Rightarrow x = 180$ bulunur.

Örnek

%70 i erkek olan bir davetten 80 erkek ayrıldığında geriye kalanların %60 ı erkek oluyor.

Buna göre bu davetteki kadın sayısını bulalım.

Çözüm

Davetteki kadın sayısı x, erkek sayısı y olsun. $(x + y) \cdot \frac{70}{100} = y$ dir.

Davetten 80 erkek ayrılınca $x + y - 80$ kişi kalır.

Bu durumda $(x + y - 80) \cdot \frac{60}{100} = y - 80$ olur.

$(x + y) \cdot \frac{70}{100} = y \Rightarrow 7x + 7y = 10y \Rightarrow 7x = 3y \Rightarrow y = \frac{7x}{3}$ olur.

$$(x + y - 80) \cdot \frac{60}{100} = y - 80 \Rightarrow 6x + 6y - 480 = 10y - 800$$
$$\Rightarrow 6x - 4y = -320$$
$$\Rightarrow 6x - 4 \cdot \frac{7x}{3} = -320$$
$$\Rightarrow 18x - 28x = -320 \cdot 3$$
$$\Rightarrow 10x = 960 \Rightarrow x = 96 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

Bir iş yerine çalışanların %60 ı kadındır. Bu iş yerinde işe 30 kadın daha alınınca kadınların sayısının erkeklerin sayısına oranı $\frac{5}{3}$ oluyor.

Buna göre bu iş yerinde kaç kişi çalışmaktadır?

Örnek

Bir kümesteki tavuk, horoz ve kazların sayıları ile ilgili olarak aşağıdakiler bilinmektedir.

- Kazların sayısı horozların sayısının %60 ıdır.
- Horozların sayısı tavukların sayısının %40 ıdır.
- Kümesteki tavuk, horoz ve kazların toplam sayısı 41 dir.

Buna göre kümeste kaç tane kaz olduğunu bulalım.

Çözüm

Kümesteki horozların sayısı x, tavukların sayısı y, kazların sayısı z olsun.

$z = \frac{60x}{100} \Rightarrow 3x = 5z \Rightarrow x = \frac{5z}{3}$ ve

$x = \frac{40y}{100} \Rightarrow 2y = 5x \Rightarrow 2y = 5 \cdot \frac{5z}{3} \Rightarrow y = \frac{25z}{6}$ olur.

$x + y + z = 41 \Rightarrow \underset{(2)}{\frac{5z}{3}} + \frac{25z}{6} + \underset{(6)}{\frac{z}{1}} = 41$

$\Rightarrow 10z + 25z + 6z = 6 \cdot 41$

$\Rightarrow 41z = 41 \cdot 6 \Rightarrow z = 6$ bulunur.

Örnek

Bir iş yerinde yapılacak aylık ücret zammı için iki seçenek sunulmuştur.

I. seçenek : Aylık ücretin %10 u zam.

II. seçenek: Aylık net 230 TL zam.

Aylık ücreti A lira olan Samet için I. seçenek daha kârlıdır. Samet'in aylık ücreti 100 TL daha az olsaydı II. seçenek daha kârlı olacaktı.

Buna göre Samet'in aylık ücretinin hangi aralıkta olduğunu bulalım.

Çözüm

A lira ücret alan Samet için I. seçenek daha kârlı olduğundan

$A + A \cdot \frac{10}{100} > A + 230 \Rightarrow \frac{A}{10} > 230 \Rightarrow A > 2300$ olur.

(A – 100) lira alsaydı II. seçenek daha kârlı olacağından

$(A - 100) + 230 > (A - 100) + (A - 100) \cdot \frac{10}{100} \Rightarrow 230 > \frac{A - 100}{10}$

$\Rightarrow 2400 > A$ olur.

O hâlde $2300 < A < 2400$ bulunur. Yani Samet'in aylık ücreti 2300 TL ile 2400 TL arasındadır.

Örnek

Bir kuruyemişçinin fıstık, fındık, leblebi ve üzümü karıştırarak oluşturduğu karışımdaki fıstık, üzüm ve leblebinin kütleleri ile fıstığın kütlece yüzde oranı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo: Kuruyemişlerin Kütleleri ve Oranları

Kuruyemiş	Fıstık	Fındık	Leblebi	Üzüm
Kütle (g)	400		250	350
Oran (%)	20			

Buna göre bu karışımdaki fındığın kütlece yüzde oranını bulalım.

Çözüm

Karışımda x gram fındık olsun.

$$(400 + x + 250 + 350) \cdot \frac{20}{100} = 400 \Rightarrow (x + 1000) \cdot \frac{1}{5} = 400$$

$$\Rightarrow x = 1000 \text{ gramdır.}$$

400 gram %20 si ise

1000 gram %y si olur.

$$y = \frac{1000 \cdot 20}{400} = 50 \text{ dir. Yani karışımın \%50 si fındıktır.}$$

Örnek

Motorlu taşıt sahipleri her yıl MTV ödemekle yükümlüdür. MTV ocak ve temmuz aylarında olmak üzere iki taksitle ödenir. Zamanında ödenmeyen taksitler için aylık %1,4 gecikme zammı uygulanır. 2017 yılında ödeyeceği MTV 450 TL olan Salih ocak ve temmuz aylarında ödemesi gereken taksitleri ekim ayının son günü ödemiştir.

Salih kaç lira ödeme yapmıştır?

! Motorlu taşıtlar vergisi (MTV) Karayolları Trafik Kanunu'na istinaden trafik şubelerine kayıtlı motorlu araçlardan alınan bir vergidir.

Çözüm

Taksit tutarı 450 : 2 = 225 TL dir. Ocak ayı taksiti 9 ay gecikmeli, temmuz ayı taksidi 3 ay gecikmeli olarak ödenmiştir. Yani 225 TL için 12 aylık bir gecikme zammı uygulanmıştır.

225 TL nin 12 aylık gecikme zammı $12 \cdot 225 \cdot \frac{1,4}{100} = 37,8$ TL dir.

O hâlde Salih 450 + 37,8 = 487,8 TL ödemiştir.

Örnek

Sevim Hanım'ın marketten aldığı ürünlerin katma değer vergisi (KDV) oranları ve satış fiyatlarına ilişkin tablo aşağıda verilmiştir.

Tablo: Ürünlerin KDV Oranları ve Satış Fiyatları

Ürün Adı	KDV Oranı	Satış Fiyatı (TL) (KDV dahil)
Helva	%8	4,86
Salça	%8	20,79
Bulaşık Deterjanı	%18	13,57
Çamaşır Suyu	%18	5,90

Sevim Hanım'ın aldığı bu ürünlerin KDV hariç toplam fiyatını bulalım.

Çözüm

Tablodaki gıda ürünlerinin toplam fiyatı 4,86 + 20, 79 = 25,65 TL dir.

Bu ürünlerin %8 KDV'siz toplam fiyatı x TL olsun.

$x + x \cdot \frac{8}{100} = 25{,}65 \Rightarrow 108x = 2565 \Rightarrow x = 23{,}75$ TL olur.

Temizlik malzemelerinin toplam fiyatı 13,57 + 5,90 = 19,47 TL dir. Bu ürünlerin %18 KDV siz toplam fiyatı y TL olsun.

$y + y \cdot \frac{18}{100} = 19{,}47 \Rightarrow 118y = 1947 \Rightarrow y = 16{,}5$ TL olur.

O hâlde Sevim Hanım'ın aldığı ürünlerin KDV hariç toplam fiyatı 23,75 + 16,50 = 40,25 TL dir.

Örnek

2018 yılında seyir halinde iken cep telefonu kullanmanın cezası 108 TL olup trafik para cezalarında tebliğ tarihinden itibaren 15 gün içinde ödeme yapanlara %25 indirim uygulanmaktadır.

Bir kişi seyir hâlinde iken cep telefonu ile konuşmaktan para cezası alır ve 15 gün içinde ödeme yaparsa ödeyeceği miktar kaç lira olur?

Çözüm

Cezada yapılan indirim miktarı $108 \cdot \frac{25}{100} = 27$ TL dir.

Ödenecek miktar 108 – 27 = 81 TL olur.

Örnek

Alış fiyatı 300 TL olan bir ürün %15 kârla satılıyor.

Bu ürünün satış fiyatını bulalım.

Çözüm

Üründen elde edilen kâr $300 \cdot \frac{15}{100} = 45$ TL olur.

Ürünün satış fiyatı $300 + 45 = 345$ TL dir.

Örnek

Bir mağazada satış fiyatı 1900 TL olan bir buzdolabı indirimli satışlarda1558 TL ye satılmıştır.

Bu buzdolabının satış fiyatına yüzde kaç indirim yapıldığını bulalım.

Çözüm

Buzdolabının satış fiyatında $1900 - 1558 = 342$ TL indirim yapılmıştır.

$1900 \cdot \frac{x}{100} = 342 \Rightarrow 19x = 342 \Rightarrow x = 18$ olup %18 indirim yapılmıştır.

Örnek

Bir çanta %10 kârla satıldığında A TL ye, %10 indirimle satıldığında B TL ye satılmaktadır.

Buna göre $\frac{A}{B}$ yi bulalım.

Çözüm

Çantanın alış fiyatı 100x olsun.

%10 kârla satılırsa $A = 100\,x + 100x \cdot \frac{10}{100} = 110\,x$ TL,

%10 indirimle satılırsa $B = 100\,x - 100x \cdot \frac{10}{100} = 90\,x$ TL olur.

Bu durumda $\frac{A}{B} = \frac{110x}{90x} = \frac{11}{9}$ bulunur.

Örnek

Bir manav elindeki kavunların $\frac{1}{4}$ ini %15 kârla, yarısını %10 zararla satıyor.

Manavın tüm kavunları sattığında zarar etmemesi için kalan malı en az yüzde kaç kâr ile satması gerektiğini bulalım.

Çözüm

Manavın elinde bir tanesinin maliyet fiyatı 100 TL olan 4x tane kavun olsun. Kavunların hepsinin toplam maliyet fiyatı $100 \cdot 4x = 400x$ TL olur.

$4x \cdot \frac{1}{4} = x$ olur. Bir tanesini %15 kârla sattığından 115 TL'den satar ve x tanesinden $115 \cdot x$ TL kazanır.

$\frac{4x}{2} = 2x$ olur. Bir tanesini %10 zararla sattığından 90 TL ye satar ve 2x tanesinden $2x \cdot 90 = 180 \cdot x$ TL kazanır.

Manav geriye kalan $4x - (x + 2x) = x$ tane kavunu en az $400x - (180x + 115x) = 105x$ TL'ye, tanesini ise en az $\frac{105x}{x} = 105$ TL ye satmalıdır. O hâlde manav kalan kavunları en az %5 kârla satmalıdır.

Örnek

Bir kırtasiyeci 6 tanesini 9 liraya aldığı kalemlerin 4 tanesini 7 liraya satıyor.

Bu kırtasiyecinin 100 lira kâr etmesi için kaç tane kalem satması gerektiğini bulalım.

Çözüm

Kırtasiyeci kalemlerin 6 tanesini 9 liraya alırsa 12 tanesini 18 liraya alır. Bu kalemlerin 4 tanesini 7 liraya satarsa 12 tanesini 21 liraya satar.

12 tane kalemi 18 liraya alıp, 21 liraya satarsa 12 kalemin satışından $21 - 18 = 3$ lira kâr eder.

12 kalemden	3 lira kâr
x kalemden	100 lira kâr

$x = \frac{12 \cdot 100}{3} = 400$ olduğundan kırtasiyeci 100 lira kâr etmek için 400 kalem satmalıdır.

Örnek

Tanesi 80 kuruştan alınan 120 tane bardağın 30 tanesi taşıma esnasında kırılıyor.

Satıcının %20 kâr edebilmesi için bardakların tanesini kaç kuruştan satması gerektiğini bulalım.

Çözüm

120 bardağın maliyeti: $120 \cdot 80 = 9600$ kuruştur.

$9600 + 9600 \cdot \frac{20}{100} = 11\ 520$ kuruş kazanılırsa %20 kâr edilir.

O hâlde geriye kalan 90 bardağın bir tanesinin satış fiyatı $\frac{11\ 520}{90} = 128$ kuruş olmalıdır.

Sıra Sizde

Bir fırıncı ekmeğin fiyatını %20 artırıp gramajını %20 azaltırsa bu ekmeğin satış fiyatına yapılan gerçek zam yüzde kaç olur?

Örnek

Tuz oranı %25 olan 200 gram tuzlu suya kaç gram saf su eklenirse tuz oranının %10 olacağını bulalım.

Çözüm

Karışımdaki tuz miktarı $200 \cdot \frac{25}{100} = 50$ gramdır. Bu karışıma x gram su eklensin. Bu durumda

$$\frac{\text{Tuz miktarı}}{\text{Karışım}} = \frac{50}{200 + x} = \frac{10}{100} \Rightarrow x + 200 = 500 \Rightarrow x = 300 \text{ gram olur.}$$

Örnek

Şeker oranı %10 olan 160 gram şekerli su ile şeker oranı %20 olan 40 gram şekerli su karıştırılıyor.

Oluşan karışımın şeker oranını bulalım.

Çözüm

160 gram şekerli su karışımında $160 \cdot \frac{10}{100} = 16$ gram, 40 gram şekerli su karışımında $\frac{40 \cdot 20}{100} = 8$ gram şeker vardır. Oluşan karışımdaki şeker oranı $\frac{\text{Şeker miktarı}}{\text{Karışım}} = \frac{16 + 8}{160 + 40} = \frac{24}{200} = \frac{12}{100} = \%12$ olur.

Örnek

Sevda 5 bardak kayısı suyu, 4 bardak şeftali suyu ve 1 bardak üzüm suyunu karıştırarak bir karışım elde ediyor. Bu karışımı tattığında üzüm suyunun az olduğunu düşünüyor.

Üzüm suyu oranını %25 yapmak için kaç bardak daha üzüm suyu eklemelidir?

Çözüm

Karışıma x bardak üzüm suyu eklensin.

Bu durumda karışımdaki üzüm suyu oranı

$$\frac{\text{Üzüm suyu miktarı}}{\text{Karışım}} = \frac{1 + x}{5 + 4 + 1 + x} = \frac{25}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + x}{10 + x} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4 + 4x = 10 + x \Rightarrow x = 2 \text{ bulunur.}$$

Örnek

%20 si şeker olan 200 gram meyve suyunun $\frac{2}{5}$ si alınıp yerine aynı miktarda şeker oranı %10 olan bir meyve suyu konuluyor.

Oluşan yeni karışımın şeker oranını bulalım.

Çözüm

Meyve suyunun $200 \cdot \frac{2}{5} = 80$ gramı alınıyor. Kalan 120 gram meyve suyunun içine şeker oranı %10 olan 80 gram meyve suyu konuluyor.

İlk meyve suyunda $120 \cdot \frac{20}{100} = 24$ gram, eklenen meyve suyunda $80 \cdot \frac{10}{100} = 8$ gram şeker vardır. Oluşan karışımdaki şeker oranı

$$\frac{\text{Şeker miktarı}}{\text{Karışım}} = \frac{24 + 8}{200} = \frac{32}{200} = \frac{16}{100} = \%16 \text{ olur.}$$

Sıra Sizde

Tuz oranı %30 olan 300 gr tuzlu su karışımından 50 gram alınıp yerine aynı miktarda saf su ekleniyor.

Elde edilen karışımın tuz oranı yüzde kaç olur?

Örnek

Tuz oranı %40 olan 30 gram tuzlu sudan kaç gram su buharlaştırıldığında son karışımın tuz oranının %50 olacağını bulalım.

Çözüm

Karışımdaki tuz miktarı $30 \cdot \frac{40}{100} = 12$ gramdır.

Buharlaşan su miktarı x gram olsun. Son karışımın tuz oranı

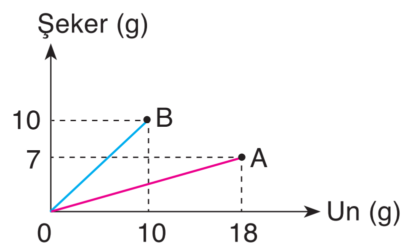
$\frac{\text{Tuz miktarı}}{\text{Karışım}} = \frac{12}{30 - x} = \frac{50}{100}$ olduğundan

$\frac{12}{30 - x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 24 = 30 - x \Rightarrow x = 6$ gramdır.

Örnek

A ve B un-şeker karışımlarının içlerindeki un ve şeker miktarlarını gram cinsinden gösteren doğrusal grafik aşağıda verilmiştir.

Grafik: A ve B Karışımlarındaki Un-Şeker Miktarları



A ve B karışımlarının her birinden 50 gram alınarak oluşturulan karışımın şeker oranını bulalım.

Çözüm

A karışımının şeker oranı $\frac{7}{18 + 7} = \frac{7}{25} = \frac{28}{100}$ olur.

B karışımın şeker oranı $\frac{10}{10 + 10} = \frac{10}{20} = \frac{50}{100}$ olur.

A karışımından alınan 50 gramın $50 \cdot \frac{28}{100} = 14$ gramı,

B karışımından alınan 50 gramın $50 \cdot \frac{50}{100} = 25$ gramı şekerdir.

Oluşturulan karışımın şeker oranı

$\frac{\text{Şeker miktarı}}{\text{Karışım miktarı}} = \frac{14 + 25}{50 + 50} = \frac{39}{100} = \%39$ olur.

Örnek

%20 lik asit çözeltisi ile %50 lik asit çözeltisinden farklı miktarlarda alınarak karıştırılıyor.

Oluşan 90 gramlık karışımın asit oranı %30 olduğuna göre çözeltilerden kaçar gram alındığını bulalım.

Çözüm

%20 lik asit çözeltisinden x gram alınmışsa %50 lik asit çözeltisinden 90 – x gram alınmıştır. x gram çözeltide $x \cdot \frac{20}{100} = \frac{x}{5}$ gram,

90 – x gram çözeltide $(90 - x) \cdot \frac{50}{100} = \frac{90 - x}{2}$ gram asit vardır.

Oluşan çözeltinin asit oranı

$$\frac{\text{Asit miktarı}}{\text{Karışım}} = \frac{\frac{x}{5} + \frac{90 - x}{2}}{90} = \frac{30}{100} \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{90 - x}{2} = 90 \cdot \frac{30}{100}$$

$$\Rightarrow 2x + 5 \cdot (90 - x) = 10 \cdot 27$$

$$\Rightarrow 2x + 450 - 5x = 270$$

$$\Rightarrow 3x = 180 \Rightarrow x = 60 \text{ olur.}$$

O hâlde %20 lik asit çözeltisinden 60 gram, %50 lik asit çözeltisinden 30 gram alınmıştır.

Örnek

Saatteki hızı 70 km olan bir araç A kentinden B kentine 10 saatte varıyor. Bu aracın aynı yolu 7 saatte alabilmesi için saatteki hızının kaç kilometre olması gerektiğini bulalım.

Çözüm

Aracın saatteki hızı V olsun. $|AB| = 70 \cdot 10 = 700$ km olur.

$700 = V \cdot 7 \Rightarrow V = 100$ km/sa. olmalıdır.

> **!** Bir aracın V km/sa. hızla t saatte aldığı yol x km olmak üzere $x = V \cdot t$ ile hesaplanır.

Örnek

Hızı saatte 108 km olan bir araç 1 saniyede kaç metre yol alır?

Çözüm

108 km = 108 000 m ve 1 saat = 3600 saniyedir.

3600 saniyede	108 000 m
1 saniyede	x m

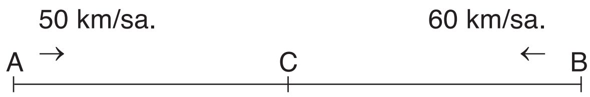
$x = \frac{108\,000}{3600} = 30$ m olur. Görüldüğü üzere 180 km/sa. = 30 m/sn. dir

Örnek

Hızları saatte 50 km ve 60 km olan iki araç, A ve B kentlerinden aynı anda birbirlerine doğru hareket ediyorlar. Araçlar karşılaştıktan 6 saat sonra yavaş olan araç B kentine varıyor.

Buna göre A ve B kentleri arasındaki uzaklığı bulalım.

Çözüm



Araçlar t saat sonra C noktasında karşılaşsın.

Bu durumda $|AC| = 50 \cdot t$, $|BC| = 60 \cdot t$ olur.

A dan hareket eden araç C den B ye 6 saatte vardığına göre

$|BC| = 50 \cdot 6 = 300$ km olur.

$|BC| = 60 \cdot t = 300$ km $\Rightarrow t = 5$ saattir.

O hâlde $|AB| = |AC| + |BC| = 50t + 60t = 110 \cdot t$ olduğundan A ve B kentleri arasındaki uzaklık $110 \cdot 5 = 550$ km olur.

Sıra Sizde

Saatteki hızı 60 km olan bir araç A şehrinden yola çıkıyor ve sabit hızla yoluna devam ediyor. 2 saat sonra saatteki hızı 80 km olan başka bir araç A şehrinden aynı yöne doğru sabit hızla hareket ediyor.

İkinci araç birinci araca kaç saat sonra yetişir?

Örnek

Bir hareketli 50 km/sa. hızla 3 saat, 60 km/sa. hızla 2 saat yol alıyor.

Buna göre bu hareketlinin yol boyunca ortalama hızının saatte kaç kilometre olduğunu bulalım.

! Bir cismin toplam yer değiştirmesinin toplam geçen zamana oranı ortalama hızı verir.

Çözüm

$$\text{Ortalama hız} = \frac{\text{Toplam yol}}{\text{Toplam zaman}}$$

$$= \frac{50 \cdot 3 + 60 \cdot 2}{3 + 2}$$

$$= \frac{270}{5} = 54 \text{ km/sa. olur.}$$

Örnek

Durgun sudaki hızı 30 km/sa. olan bir motor akıntı hızı 5 km/sa. olan nehirde akıntıya karşı belli bir mesafe gitmiş, aynı yoldan geri dönerek başladığı noktaya varmıştır.

Yolculuk 6 saat sürdüğüne göre motorun aldığı toplam yolu bulalım.

Çözüm

Motor akıntıya karşı yol alırken saatteki hızı 30 – 5 = 25 km ve akıntıyla aynı yönde yol alırken saatteki hızı 30 + 5 = 35 km olur.

Motor t saatte giderse (6 – t) saatte döner. Motorun giderken aldığı yol ile dönerken aldığı yol aynı olduğundan

$25 \cdot t = 35(6 - t) \Rightarrow 25t = 210 - 35t \Rightarrow 60t = 210 \Rightarrow t = 3{,}5$ saattir.

Motorun aldığı yol $2 \cdot 25 \cdot t = 50 \cdot 3{,}5 = 175$ km bulunur.

YÜRÜYEN MERDİVEN

Siz ve arkadaşınız yukarı doğru hareket eden bir yürüyen merdivendesiniz. Ancak işiniz acele olduğu için merdivenlerde durmak yerine siz de basamakları çıkıyorsunuz. Çıkış hızı sizinkinin iki katı olan arkadaşınız üst kata vardığında -son basamak dahil- toplam 30 basamağa basmış oluyor. Siz üst kata vardığınızda ise toplam 20 basamağa bastınız.

Yürüyen merdivenin kaç basamağı olduğunu bulunuz.

Örnek

Hızı 160 km/sa. olan tren 1400 metre uzunluğundaki bir tüneli 36 saniyede tamamen geçiyor.

Buna göre trenin uzunluğunun kaç metre olduğunu bulalım.

Çözüm

Trenin tüneli tamamen geçmesi için aldığı yol trenin uzunluğu ile tünelin uzunluğunun toplamıdır.

1400 m = 1,4 km ve 36 saniye $= \dfrac{36}{3600} = \dfrac{1}{100}$ saattir.

Trenin uzunluğu x olsun.

$x + 1{,}4 = 160 \cdot \dfrac{1}{100} \Rightarrow x = 1{,}6 - 1{,}4 \Rightarrow x = 0{,}2 \text{ km} \Rightarrow x = 200$ metredir.

Örnek

İrem bir işi 6 günde, Seçil aynı işi 8 günde bitirebilmektedir.

İkisi birlikte 3 gün çalışırlarsa işin kaçta kaçını bitireceklerini bulalım.

Çözüm

Bir günde İrem işin $\frac{1}{6}$ ini, Seçil $\frac{1}{8}$ ini, ikisi birlikte $\underset{(4)}{\frac{1}{6}} + \underset{(3)}{\frac{1}{8}} = \frac{7}{24}$ sini bitirirler. İkisi 3 günde işin $3 \cdot \frac{7}{24} = \frac{7}{8}$ sini bitirirler.

Örnek

Bir işi Şevket 24 günde, Hasan 32 günde yapabiliyor. Birlikte 8 gün çalıştıktan sonra Hasan işten ayrılıyor.

Şevket'in kalan işi tek başına kaç günde bitirebileceğini bulalım.

Çözüm

Bir günde Şevket işin $\frac{1}{24}$ ini, Hasan $\frac{1}{32}$ ini yapmaktadır. 8 günde birlikte $8 \cdot \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{32}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ sini yaparlar. Geriye işin $\frac{5}{12}$ i kalır.

Şevket işin tamamını 24 günde yaparsa $\frac{5}{12}$ ini $24 \cdot \frac{5}{12} = 10$ günde yapar.

Örnek

Bir işi tek başına 6 saatte bitirebilen aynı nitelikteki 3 işçi ikişer saat arayla çalışmaya başlıyorlar.

İşi toplam kaç saatte bitirebileceklerini bulalım.

Çözüm

İşin tamamı t saatte biterse 1. işçi t saat, 2. işçi (t – 2) saat, 3. işçi (t – 4) saat çalışmış olur.

$$t \cdot \frac{1}{6} + (t-2) \cdot \frac{1}{6} + (t-4) \cdot \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow \frac{t}{6} + \frac{t}{6} + \frac{t}{6} = 1 + \frac{2}{6} + \frac{4}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{3t}{6} = \frac{6+2+4}{6}$$

$$\Rightarrow 3t = 12$$

$$\Rightarrow t = 4 \text{ saat olur.}$$

Örnek

Bir terzi 3 günde 8 pantolon, kalfası ise 2 günde 3 pantolon dikiyor.

Birlikte 150 pantolonu kaç günde dikeceklerini bulalım.

Çözüm

Terzi 3 günde 8 pantolon dikerse 6 günde 16 pantolon, kalfası 2 günde 3 pantolon dikerse 6 günde 9 pantolon diker. İkisi birlikte 6 günde 16 + 9 = 25 pantolon dikerler.

6 günde 25 pantolon dikerlerse

x günde 150 pantolon dikerler.

$x = \frac{150 \cdot 6}{25} = 36$ olduğundan ikisi birlikte 150 pantolonu 36 günde dikerler.

Örnek

Duygu ve Gülşen bir işi birlikte 4 saat çalışarak bitirebiliyorlar. Bu işi Duygu tek başına Gülşen'in tek başına bitirebileceği sürenin 2 katı sürede bitirebiliyor.

Buna göre Gülşen'in bu işi tek başına kaç saatte bitirebileceğini bulalım.

Çözüm

Gülşen işi t saatte bitirirse Duygu 2t saatte bitirir.

$$\underset{(2)}{\frac{1}{t}} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2+1}{2t} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2t = 12$$

$$\Rightarrow t = 6 \text{ bulunur.}$$

Örnek

Biri diğerinin 4 katı hızla çalışan iki makine bir işi birlikte 8 saatte bitirebiliyor. Bu makinelerden yavaş olan işe başladıktan 20 saat sonra ikinci makine çalıştırılıyor.

Kalan işi birlikte kaç saatte bitirebileceklerini bulalım.

Çözüm

İşin tamamını hızlı olan makine t saatte, yavaş olan makine 4t saatte bitirebilir.

$\frac{1}{t} + \frac{1}{4t} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{5}{4t} = \frac{1}{8} \Rightarrow t = 10$ olup yavaş olan makine işi 40 saatte bitirebilir. 20 saatte $20 \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{2}$ ini bitirir. İkisi birlikte işin tamamını 8 saatte bitirebildiklerinden kalan yarısını 4 saatte bitirirler.

1. Bir yarışmada sorulan soruların bazılarının doğru cevabı 4 puan, bazılarının doğru cevabı 6 puandır.

   Yarışmadaki 12 sorunun hepsine doğru cevap veren yarışmacı 54 puan kazandığına göre 6 puanlık kaç soruya doğru cevap vermiştir?

2. Bir kasadaki limonların önce $\frac{2}{3}$ si, sonra kalan limonların yarısı satılmıştır.

   Geriye 10 limon kaldığına göre başlangıçta kasada kaç limon vardı?

3. Bir bisikletli bir yolun önce $\frac{1}{6}$ ini, sonra kalan yolun $\frac{1}{3}$ ini gidiyor.

   40 m daha gittiğinde yolun yarısına geliyor. Yolun uzunluğu kaç metredir?

4. Taksitli fiyatı 2400 TL olan bir koltuk takımı peşin alındığında taksitli fiyat üzerinden %20 indirim uygulanacaktır.

   Peşin ödeme yaparak bu koltuk takımını alan bir kişi kaç lira kâr etmiştir?

5. Bir kuaförde saç kestirme 20 TL, fön çektirme 10 TL, saç kestirme ve fön çektirme 25 TL dir. Bir gün içinde kuaföre toplam 18 müşteri gelmiştir.

   Saç kestiren müşteri sayısı 10, fön çektiren müşteri sayısı 13 olduğuna göre bu kuaförün o günkü kazancı kaç liradır?

6. Ömer ve Hakan'ın bugünkü yaşları toplam 30 dur.

   Ömer 3 yıl önce, Hakan 4 yıl sonra doğmuş olsaydı bugünkü yaşları toplamı kaç olurdu?

7. Bir baba ile iki çocuğunun yaşları toplamı 70 tir. 5 yıl önce babanın yaşı çocuklarının yaşları toplamının 3 katından 5 eksikti.

   Buna göre babanın şimdiki yaşı kaçtır?

8. Kilogramı 4 liradan alınan bir kayısı kurutulunca ağırlığının %40 ını kaybediyor.

   Kuru kayısının kilogramı 10 liradan satılırsa yüzde kaç kâr edilir?

9. Bir satıcı elindeki bardakların %60 ını %30 kârla satıyor.

   Geriye kalan bardakların yarısı kırılıyor. Satıcı zarar etmemek için kalan bardakları en az yüzde kaç kâr ile satmalıdır?

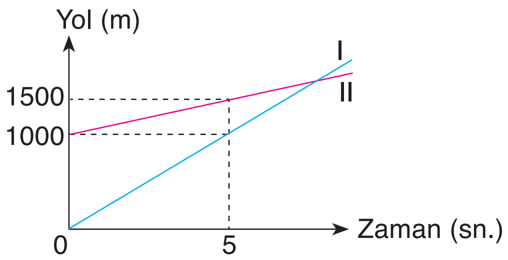
10. Aynı nitelikteki 6 işçi birlikte çalışmaya başlıyorlar. Her gün bir işçi ayrılıyor ve işin tamamı 4 günde bitiyor.

Buna göre bir işçi tek başına işin tamamını kaç günde bitirebilir?

11. Boyları eşit iki mumdan biri 8 saatte, diğeri 6 saatte tamamen eriyor.

Aynı anda yakıldıktan kaç saat sonra mumların boylarının oranı $\frac{2}{3}$ olur?

12. Grafik: Yolun Zaman Göre Değişimi



Sabit hızla aynı yöne hareket eden iki hareketlinin aldıkları yolun zamana göre değişimini gösteren doğrusal grafik yanda verilmiştir.

Buna göre I. hareketli II. hareketliye kaç saniye sonra yetişir?

13. Erkan bisikletiyle belli bir yolu 6 km/sa. hızla gitmiş ve 12 km/sa. hızla geri dönmüştür.

Erkan'ın gidiş dönüşteki ortalama hızı kaç m/sn. dir?

14. Turhan bir işin $\frac{1}{4}$ ini yaptıktan sonra 8 gün daha çalışarak işin yarısını bitiriyor.

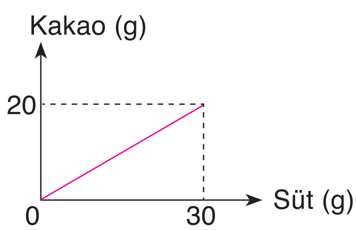
Turhan işin tamamını bitirmek için kaç gün daha çalışmalıdır?

15. Tuz oranı %10 olan 20 litre tuzlu suya kaç litre su eklenirse karışımın tuz oranı %8 olur?

16. Reyhan Hanım, şapka örüp satarak aile ekonomisine katkıda bulunmak istiyor. Şapka modelleri için 30 TL ye bir dergi alıyor. Öreceği bir şapka için malzeme giderinin 5 TL olacağını hesaplayıp satış fiyatını 20 TL olarak belirliyor.

Bu şapkaların satışından en az 270 TL kâr etmek isteyen Reyhan Hanım en az kaç şapka satmalıdır?

17. Grafik: Süt ve Kakao Miktarları



Bir kakaolu sütün içindeki süt ve kakao miktarlarının oranını gösteren doğrusal grafik yanda verilmiştir. Bu kakaolu sütün 160 gramının içine 40 gram kakao ekleniyor.

Yeni karışımın kakao oranı yüzde kaç olur?

1. $A = (-\infty, 9)$ ve $B = [8, \infty)$

olduğuna göre A – B aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 8]$ B) $[9, \infty)$ C) $(-\infty, 8)$ D) $(9, \infty)$ E) $[8, 9)$

2. I. Her irrasyonel sayı devirli ondalık gösterime dönüştürülebilir.

II. Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesi ayrıktır.

III. İki irrasyonel sayı arasında sonlu sayıda irrasyonel sayı vardır.

IV. Bütün gerçek sayılar rasyonel sayıdır.

V. Bütüm tam sayılar irrasyonel sayıdır.

Yukarıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. $3x - 1 = 8$ ve $2x + a = 10$ denklemlerinin çözüm kümeleri aynı ise a aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

4. $-3(-5 - 2x) \geq -3(1 - 3x)$

eşitsizliğinin doğal sayılar kümesindeki çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

5. $|x^2 + 2x - 3| = |x + 3|$

denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 0 D) –1 E) –2

6. $ax + 15y - b = 0$

$-2x + 3y - 1 = 0$

denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı ise a – b kaçtır?

A) –15 B) –5 C) 5 D) 15 E) 20

7. $$\frac{3}{\sqrt{5 + \sqrt{24}}} - \frac{9}{\sqrt{3}}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

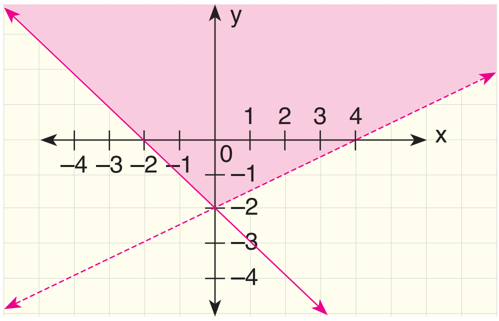
A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $-2\sqrt{3}$ D) $-3\sqrt{2}$ E) $-3\sqrt{3}$

8. $(0{,}5)^{2x + 3} = 8^{x + 4}$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

A) –3 B) –2 C) –1 D) 1 E) 2

9.



Yukarıdaki koordinat sisteminde çözüm kümesi boyanarak gösterilen eşitsizlik sistemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x + y \le -2$, $x - 2y > 4$

B) $x + y \ge 2$, $x - y < 4$

C) $x + y > -2$, $x - 2y \le 4$

D) $x - y \ge 2$, $x - 2y < 4$

E) $x + y \ge -2$, $x - 2y < 4$

10. 2a3b dört basamaklı sayısı 9 ile kalansız bölünüyor ve 5 ile bölümünden 4 kalanını veriyor.

Buna göre a nın alacağı değerler toplamı kaçtır?

A) 15 B) 13 C) 12 D) 11 E) 9

11. 24 litre zeytinyağı, 16 litre ayçiçek yağı ve 40 litre fındık yağı karıştırılmadan eşit hacimli şişelere hiç artmamak koşulu ile doldurulacaktır.

En az kaç şişeye ihtiyaç vardır?

A) 7 B) 8 C) 10 D) 12 E) 13

12. Bir lokantaya giden Elif'in 20 TL si, Mert'in 15 TL si ve Mutlu'nun 25 TL si vardır.

Bu üç arkadaş 48 TL lik hesabı paralarıyla doğru orantılı paylaşırsa Mutlu kaç TL öder?

A) 12 B) 15 C) 16 D) 20 E) 22

13. Şeker oranı %40 olan 70 gram şekerli su karışımına 27 gram şeker ve 28 gram saf su ekleniyor.

Yeni karışımın şeker oranı yüzde kaçtır?

A) 52 B) 50 C) 48 D) 46 E) 44

14. A köyünden C köyüne gidecek olan bir araç B köyünden geçecektir. Bu araç

- A köyü ile B köyü arasındaki yolu saatte ortalama V km hızla 3 saatte alıyor.
- B köyü ile C köyü arasındaki yolu hızını saatte ortalama 30 km artırarak 2 saatte alıyor.
- Yolculuk süresince toplam 180 km yol alıyor.

Buna göre V kaçtır?

A) 18 B) 22 C) 24 D) 30 E) 34

15. Gökhan'ın çalışma hızı Murat'ın çalışma hızının 2 katı, Mesut'un çalışma hızının yarısıdır.

Üçü birlikte bir işi 16 günde bitirebildiklerine göre aynı işi Mesut tek başına kaç günde bitirir?

A) 7 B) 14 C) 28 D) 56 E) 112

16. Şükrü ile annesinin yaşları toplamı 60 tır.

Şükrü annesinin yaşına geldiğinde annesi 69 yaşında olacağına göre Şükrü'nün şimdiki yaşı kaçtır?

A) 20 B) 19 C) 18 D) 17 E) 16

1. Aşağıdaki kümelerden hangisinin elemanları irrasyonel sayıdır?

A) $\{3,\overline{7}\}$ B) $\{-\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \pi\}$

C) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$ D) $\left\{-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}, 8\right\}$

E) $\{0,125\}$

2. $$\frac{a-x}{2} - \frac{3x-1}{3} = -\frac{1}{6}$$

denkleminin çözüm kümesi $\{-1\}$ olduğuna göre a kaçtır?

A) –4 B) –3 C) 0 D) 3 E) 4

3. $$5x - 1 \leq 3x + 7$$

eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, -4)$ B) $(-\infty, -4]$

C) $(-\infty, 2)$ D) $(-\infty, 4)$

E) $(-\infty, 4]$

4. $$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 3$$

denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(-15, 12)\}$ B) $\{(-15, -12)\}$

C) $\{(15, 12)\}$ D) $\{(15, -12)\}$

E) $\{(-12, -15)\}$

5. $$5 + 2|2 - 2x| \leq 13$$

eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1, 3)$ B) $[-1, 3)$

C) $[-1, 3]$ D) $(-1, 2]$

E) $[-1, 2]$

6. Aşağıda verilen eşitsizlik sistemlerinden hangisinin çözümü boş kümedir?

A) $y < x + 2$, $y < x - 3$

B) $y < x + 2$, $y > x - 3$

C) $2y - x < 4$, $y + 4x > 8$

D) $2x - y < 10$, $2x - y \geq 6$

E) $y > x + 2$, $y < x - 3$

7. $$\frac{5^{n+3} - 2 \cdot 5^{n+2}}{5^{n+1}}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 25 B) 20 C) 15 D) 10 E) 5

8. $$\sqrt{\sqrt[3]{4\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{2\sqrt{x+1}}$$

denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $\{2\}$ C) $\{\sqrt{2} + 1\}$

D) $\{\sqrt{2} - 1\}$ E) $\{\sqrt{2}\}$

9. Dört basamaklı 5a4b sayısının 3 ile bölümünden kalan 1 ve 4 ile bölümünden kalan 2 dir.

Buna göre kaç farklı (a, b) sıralı ikilisi vardır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

10. 452 sayısından hangi sayı çıkarılırsa elde edilen sayı 15, 25 ve 18 ile kalansız bölünür?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

11. $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ ve $2a + b - c = 14$

olduğuna göre a + b + c kaçtır?

A) 77 B) 70 C) 63 D) 56 E) 49

12. Bir galerici elindeki arabalardan birini %20 kârla, diğerini %10 zararla 45 000 er liraya satıyor.

Galericinin kâr-zarar durumu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) 2500 TL kâr B) 1250 TL kâr
C) 2500 TL zarar D) 1250 TL zarar
E) Ne kâr ne zarar

13. Bir grup işçi bir işi 5 günde bitirebilmektedir.

İşçi sayısı %25 artırılırsa aynı iş kaç günde biter?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. Bir ilde aylık su tüketim faturası hesaplanırken aşağıdakiler faturaya yansıyor.

- Suyun birim fiyatı 4,5 TL dir.
- 1 m^3 su fiyatına eşit olan bakım bedeli alınmaktadır.
- Su bedeli ile bakım bedeli toplamının %8 i oranında KDV alınmaktadır.
- 1,98 TL çevre tüketim vergisi alınmaktadır.

Buna göre aylık faturası 36 TL olan bir aile kaç metreküp su tüketmiştir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

15. Bir gruptaki 35 erkeğin %80 i, kadınların %60 ı İngilizce konuşabilmektedir.

Bu grubun %74 ü İngilizce konuşabildiğine göre gruptaki kadın sayısı kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 17

16. Serkan kütleleri 34 kg olan 40 tane kutuyu asansörle üst kata çıkaracaktır.

Asansörün yük taşıma kapasitesi 400 kg ve Serkan'ın kütlesi 92 kg olduğuna göre Serkan en az kaç seferde kutuları üst kata taşır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

GEOMETRİ

ÜÇGENLER

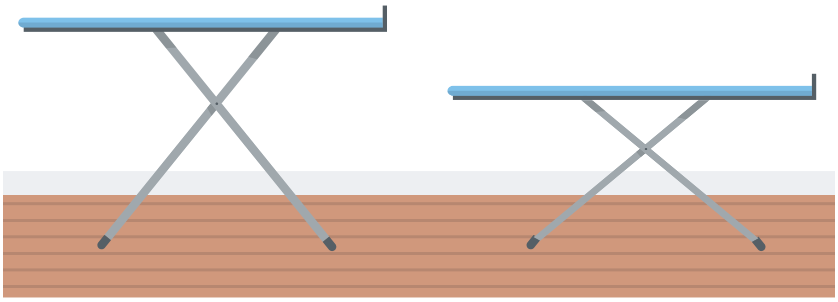
Neler Öğreneceğiz?

- Açı çeşitleri, paralel iki doğrunun bir kesenle yaptığı açılar
- Üçgende açı özellikleri
- Üçgenin kenar uzunlukları ile bu kenarların karşılarındaki açıların ölçüleri arasındaki ilişki
- Uzunlukları verilen üç doğru parçasının hangi durumlarda üçgen oluşturacağı
- Üçgenlerin eşliği ve benzerliği
- Üçgenin açıortayları ve kenarortaylarının özellikleri
- Üçgenin kenar orta dikmeleri
- Üçgenin yükseklikleri
- Pisagor teoremi
- Öklid teoremi
- Dik üçgende dar açıların trigonometrik oranları
- Birim çemberde açıların trigonometrik oranları
- Üçgenin alanı

Nerelerde Karşımıza Çıkar?

Açılar ve üçgenler sıvacılık, döşemecilik, duvar kaplamacılığı, mermercilik, fotoğrafçılık, avize imalatçılığı, terzilik, seramik ve çinicilik, diş protezciliği, halıcılık, ayakkabıcılık, dericilik gibi birçok meslek dalında kullanılır. Ayrıca bayındırlık ve zanaatla ilgili teknik çalışmalarda, endüstriyel alanlarda, güzel sanatlarda, mimaride, mühendislikte, haritacılıkta, simülasyonlarda ve daha birçok alanda karşımıza çıkar.

9.4.1. ÜÇGENLERDE TEMEL KAVRAMLAR



Ütü masasının altında destek sağlayan ayaklarla zemin arasında kalan bölge bir üçgene benzemektedir. Ütü masası alçaldıkça ayakları arasındaki mesafe artar. Ancak ayaklar ortadan sabitlendiği için yanda kalan demirlerin uzunlukları değişmez. Ayaklarla masa arasında kalan üçgenin yan kenarları aynı uzunlukta kalırken ayaklar arasındaki mesafe değişmektedir. Masayı farklı yüksekliklere getirdiğimizde farklı üçgenler elde edilecektir.

- Bir üçgende iki kenarın uzunluğu değişmediği hâlde üçüncü kenarın uzunluğunun değişmesini nasıl açıklarsınız?
- Ütü masasının ayaklarının oluşturduğu açılardan eşit olanları belirleyiniz.

9.4.1.1. Üçgende Açı Özellikleri ile İlgili İşlemler

Açı Çeşitleri, Paralel İki Doğrunun Bir Kesenle Yaptığı Açılar

Sembol ve Gösterimler

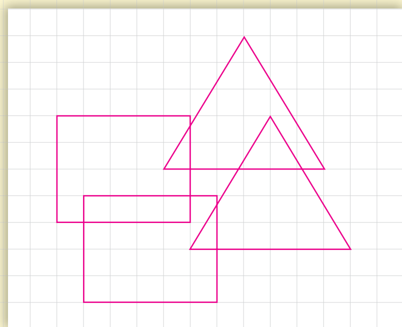
$\widehat{ABC}$

$\widehat{ABC}$

$m(\widehat{ABC})$

[AB]

|AB|



» Yukarıdaki görselde yer alan açı çeşitlerini belirleyiniz.

Örnek

$\widehat{ABC}$ geniş açı ve $m(\widehat{ABC}) = 3x - 18°$ dir.

x bir tam sayı olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ nün en büyük değeri kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABC}$ geniş açı ise $90° < m(\widehat{ABC}) < 180°$ dir. O hâlde $90° < 3x - 18° < 180° \Rightarrow 108° < 3x < 198° \Rightarrow 36° < x < 66°$ bulunur. Bu durumda x in en büyük tam sayı değeri 65° olup $m(\widehat{ABC})$ nün en büyük değeri $m(\widehat{ABC}) = 3x - 18° = 3 \cdot 65° - 18° = 177°$ dir.

Örnek

Ölçüsü $6x - 12°$ olan açı dik açıdır.

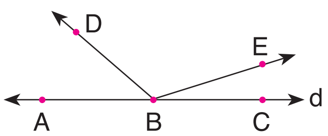
Buna göre ölçüsü $9x - 65°$ olan açının çeşidini bulalım.

Çözüm

$6x - 12° = 90° \Rightarrow 6x = 102° \Rightarrow x = 17°$ dir.

Buna göre $9x - 65° = 9 \cdot 17° - 65° = 153° - 65° = 88°$ olup açı dar açıdır.

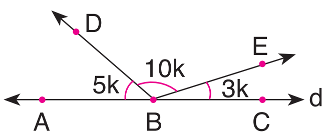
Örnek



$\widehat{DBE}$ nın B köşesi d doğrusunun üzerindedir.

$3 \cdot m(\widehat{DBE}) = 6 \cdot m(\widehat{ABD}) = 10 \cdot m(\widehat{EBC})$ olduğuna göre $m(\widehat{DBC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$3 \cdot m(\widehat{DBE}) = 6 \cdot m(\widehat{ABD}) = 10 \cdot m(\widehat{EBC})$

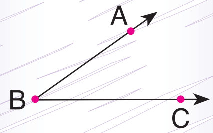
EBOB(3,6,10) = 60 olduğundan

$m(\widehat{DBE}) = 10k$, $m(\widehat{ABD}) = 5k$ ve

$m(\widehat{EBC}) = 3k$ olur.

$\widehat{ABD}$ ile $\widehat{DBC}$ komşu bütünler açılardır. O hâlde $5k + 10k + 3k = 180°$ $\Rightarrow 18k = 180° \Rightarrow k = 10°$ ve $m(\widehat{DBC}) = 13k = 13 \cdot 10 = 130°$ bulunur.

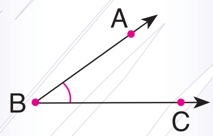
! Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının arasında kalan bölgeye açı denir.



Buradaki açı $\widehat{ABC}$ veya $\widehat{CBA}$ olarak gösterilebilir.

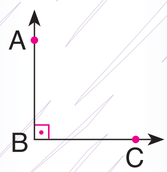
! $(\widehat{ABC})$ nın ölçüsü $m(\widehat{ABC})$ ile gösterilir.

! **Dar açı:** Ölçüsü 0° ile 90° arasında olan açıya denir.



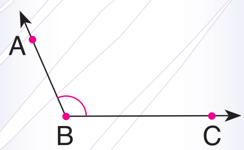
$0° < m(\widehat{ABC}) < 90°$ dir.

Dik açı: Ölçüsü 90° olan açıya denir.



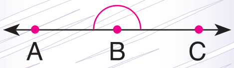
$m(\widehat{ABC}) = 90°$ dir.

Geniş açı: Ölçüsü 90° ile 180° arasında olan açıya denir.

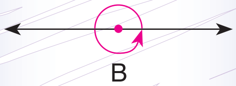


$90° < m(\widehat{ABC}) < 180°$ dir.

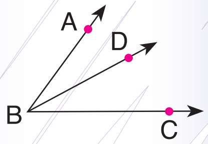
Doğru Açı: Ölçüsü 180° olan açıya denir.



Tam Açı: Ölçüsü 360° olan açıya denir.



Komşu Açılar: Birer kolu ortak olan açılara denir.

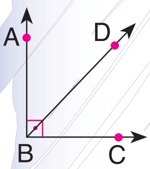


$\widehat{ABD}$ ile $\widehat{DBC}$ komşu açılardır.

Tümler Açılar: Ölçüleri toplamı 90° olan açılara denir.

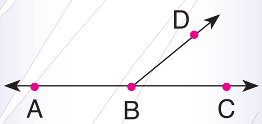
Bütünler Açılar: Ölçüleri toplamı 180° olan açılara denir.

Komşu Tümler Açılar: Ölçüleri toplamı 90° olan komşu açılara denir.



$\widehat{ABD}$ ile $\widehat{DBC}$ komşu tümler açılardır.

Komşu Bütünler Açılar: Ölçüleri toplamı 180° olan komşu açılara denir.



$\widehat{ABD}$ ile $\widehat{DBC}$ komşu bütünler açılardır.

Örnek

Bir açının bütünler açısının ölçüsü kendisinden 30° fazladır.

Bu açının ölçüsünün, tümler açısının ölçüsünün kaç katı olduğunu bulalım.

Çözüm

Açının ölçüsüne x dersek bütünler açısının ölçüsü 180° – x olur.

$180° - x = x + 30° \Rightarrow 2x = 150° \Rightarrow x = 75°$ dir.

Ölçüsü 75° olan açının tümler açısının ölçüsü 90° – 75° = 15° dir.

O hâlde ölçüsü 75° olan açı tümler açısının ölçüsünün 5 katıdır.

Örnek

$m(\widehat{ABC}) = a + 184°$ ve $m(\widehat{KLM}) = b - 64°$ dir.

$\widehat{ABC}$ tam açı, $\widehat{KLM}$ doğru açı olduğuna göre a + b nin kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABC}$ tam açı olduğundan $a + 184° = 360° \Rightarrow a = 176°$ ve

$\widehat{KLM}$ doğru açı olduğundan $b - 64° = 180° \Rightarrow b = 244°$ dir.

O hâlde $a + b = 176° + 244° = 420°$ bulunur.

Sıra Sizde

Bütünler açısının ölçüsü, tümler açısının ölçüsünün 5 katı olan açı kaç derecedir?

Örnek

Bütünler iki açının oranı $\frac{2}{7}$ dir.

Bu açıların ölçüleri arasındaki farkı bulalım.

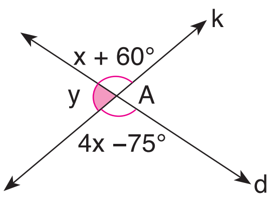
Çözüm

$k \in \mathbb{R}$ olmak üzere açıların ölçüleri 2k ve 7k olur.

Açılar bütünler olduğu için $2k + 7k = 180° \Rightarrow 9k = 180° \Rightarrow k = 20°$ dir.

Bu açıların ölçüleri arasındaki fark $7k - 2k = 5k = 5 \cdot 20° = 100°$ olur.

Örnek



Şekilde d ∩ k = {A} dır.

Verilen açı ölçülerine göre y nin kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

Ölçüleri 4x – 75° ve x + 60° olan açılar ters açılardır ve ölçüleri eşittir.

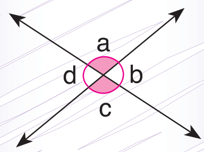
$4x - 75° = x + 60° \Rightarrow 3x = 135° \Rightarrow x = 45°$ olur.

$x + 60° = 45° + 60° = 105°$ dir.

Ölçüsü 105° ve y olan açılar komşu bütünler açılardır.

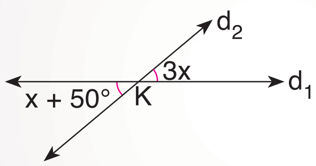
Buna göre $y = 180° - 105° = 75°$ bulunur.

Ters Açılar



Birbirini kesen iki doğrunun oluşturduğu komşu olmayan açılardır.
Ters açıların ölçüleri eşittir.
a = c ve b = d dir.

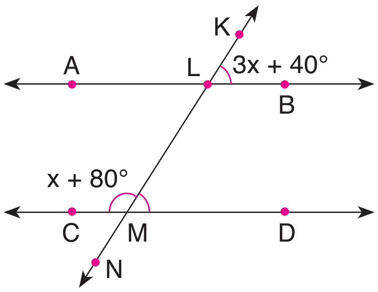
Sıra Sizde



Şekilde $d_1 \cap d_2 = \{K\}$ dir.

Verilen açı ölçülerine göre x kaç derecedir?

Örnek

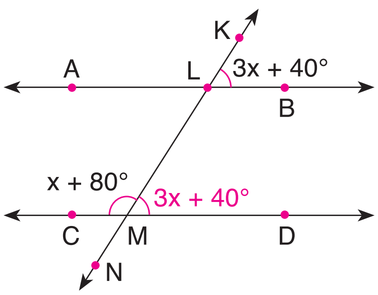


Şekilde KN doğrusu, birbirine paralel olan AB ve CD doğrularını kesmektedir.

$m(\widehat{KLB}) = 3x + 40°$ ve

$m(\widehat{KMC}) = x + 80°$ olduğuna göre x in kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

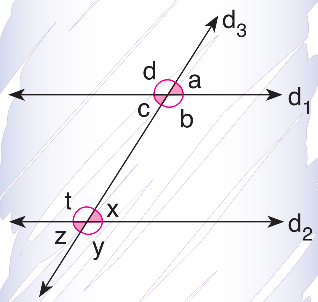


$\widehat{KLB}$ ile $\widehat{KMD}$ yöndeş açılar olduğundan $m(\widehat{KMD}) = 3x + 40°$ dir.

$\widehat{KMC}$ ile $\widehat{KMD}$ komşu bütünler açılar olduğundan toplamları 180° dir. Buradan

$x + 80° + 3x + 40° = 180° \Rightarrow x = 15°$ bulunur.

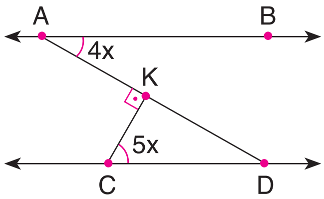
Paralel İki Doğrunun Bir Kesenle Yaptığı Açılar



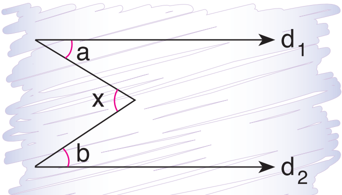
$d_1 \mathbin{//} d_2$ ve d_3 bu doğruları kesen bir doğrudur.

- a ile x, b ile y, d ile t, c ile z yöndeş açılar olup ölçüleri eşittir.
  a = x, b = y,
  d = t, c = z
- c ile x, b ile t iç ters açılar olup ölçüleri eşittir.
  c = x, b = t
- a ile z, d ile y dış ters açılar olup ölçüleri eşittir.
  a = z, d = y

Örnek

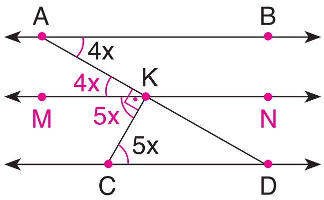


Şekilde AB // CD ve [CK] ⊥ [AD] dır. $m(\widehat{BAD}) = 4x$ ve $m(\widehat{KCD}) = 5x$ olduğuna göre x in kaç derece olduğunu bulalım.



$d_1 // d_2 \Rightarrow x = a + b$ dir.

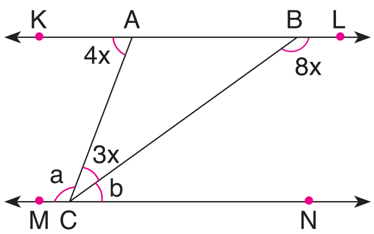
Çözüm



AB // CD // MN olacak şekilde MN doğrusunu çizdiğimizde $\widehat{AKM}$ ile $\widehat{BAD}$, $\widehat{MKC}$ ile $\widehat{KCD}$ iç ters açılardır.

Buradan $m(\widehat{AKM}) = 4x$, $m(\widehat{MKC}) = 5x$ olur. $4x + 5x = 90° \Rightarrow x = 10°$ bulunur.

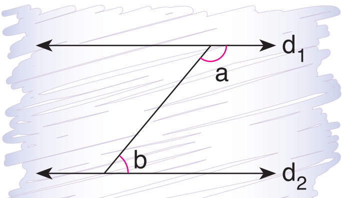
Örnek



Şekilde A ve B noktaları KL doğrusunun, C noktası MN doğrusunun üzerinde ve KL // MN dir.

$m(\widehat{KAC}) = 4x$, $m(\widehat{LBC}) = 8x$, $m(\widehat{ACB}) = 3x$, $m(\widehat{ACM}) = a$, $m(\widehat{BCN}) = b$ olduğuna göre a – b nin kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$d_1 // d_2 \Rightarrow a + b = 180°$ dir.

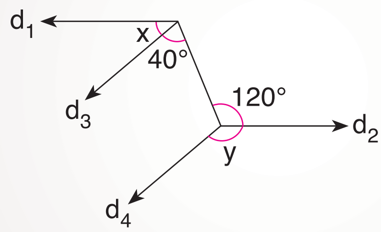
$b + 8x = 180° \Rightarrow b = 180° - 8x$, $a + 4x = 180° \Rightarrow a = 180° - 4x$ olur.

$\widehat{MCN}$ doğru açı olduğundan

$180 - 4x + 3x + 180 - 8x = 180 \Rightarrow 9x = 180 \Rightarrow x = 20°$ bulunur.

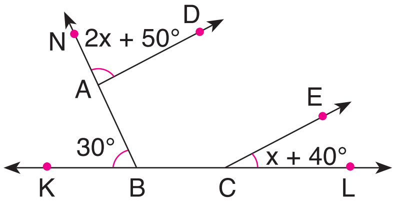
$a - b = (180° - 4x) - (180° - 8x) = 4x = 4 \cdot 20° = 80°$ olur.

Sıra Sizde



Şekilde $d_1 // d_2$ ve $d_3 // d_4$ tür. Verilen ölçülere göre x + y kaç derecedir?

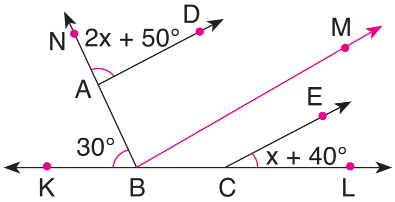
Örnek



Şekilde K, B, C, L doğrusal noktalar ve [AD // [CE dır.

$m(\widehat{NBK}) = 30°$, $m(\widehat{ECL}) = x + 40°$ ve $m(\widehat{NAD}) = 2x + 50°$ olduğuna göre $m(\widehat{KCE})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$\widehat{NBK}$ ile $\widehat{NBL}$ komşu bütünler açılar olup

$m(\widehat{NBL}) = 180° - 30° = 150°$ dir.

[AD // [CE // [BM olacak şekilde [BM çizersek $\widehat{MBL}$ ile $\widehat{ECL}$, $\widehat{NAD}$ ile $\widehat{NBM}$ yöndeş açılar olur.

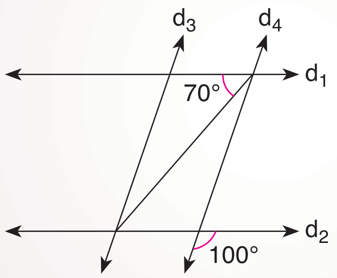
Bu durumda $m(\widehat{MBL}) = x + 40°$ ve $m(\widehat{NBM}) = 2x + 50°$ olur.

$m(\widehat{NBL}) = m(\widehat{NBM}) + m(\widehat{MBL})$ ise

$150° = 2x + 50° + x + 40° \Rightarrow 3x = 60° \Rightarrow x = 20°$ dir.

$m(\widehat{ECL}) = 20° + 40° = 60°$ olup $m(\widehat{KCE}) = 180° - 60° = 120°$ bulunur.

Sıra Sizde



Şekilde $d_1 // d_2$ ve $d_3 // d_4$ tür.
Verilen ölçülere göre x kaç derecedir?

Mustafa Kemal Atatürk (1881-1938)

Mustafa Kemal Atatürk, 1936-1937 yıllarında Dolmabahçe Sarayı'nda kendi el yazısı ile kaleme aldığı 44 sayfalık geometri kitabında anlaşılması güç olan terimlere Türkçe karşılıklar bularak, geometrinin bugün kolay bir şekilde yazılıp anlaşılmasını sağlamıştır. Bu kitap 1937 yılında Milli Eğitim Bakanlığı tarafından yazar adı belirtilmeden yayınlanmış, 1971 yılında da kitabın ikinci baskısı Türk Dil Kurumu tarafından çıkarılmıştır. Atatürk'ün kendi türettiği terimler ve tanımların büyük bölümü bugüne kadar değişmeden kullanılmıştır.

Üçgenlerde Açılar

27°	43°	62°	111°	113°	68°
93°	26°	115°	19°	3°	40°

Dört üçgene ait olan iç açıların ölçüleri yukarıda karışık şekilde verilmiştir.

» Bu açı ölçülerini aynı üçgenin iç açılarının ölçüleri olacak şekilde üçerli gruplandırınız.

Mustafa Kemal Atatürk'ün Geometri kitabında önerdiği ve hâlâ kullanılan bazı terimlerin Osmanlıcası ve Türkçesi şunlardır:

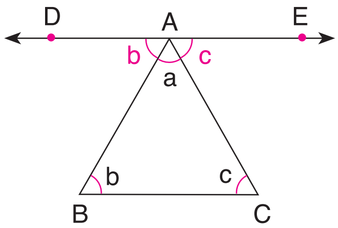
Osmanlıcası	Türkçesi
Zâviye	Açı
Dılı	Kenar
Mesâha-i sathiyye	Alan
Zâviye-i hadde	Dar açı
Murabba	Kare
Hatt-ı munassıf	Açıortay
Şibh-ı münharif	Yamuk
Nısf-ı kutur	Yarıçap

❉ Atatürk'ün geometriye kazandırdığı bu terimlerin İngilizce karşılıklarını söyleyiniz. Bu terimlerin anlamlarını İngilizce açıklayınız.

Örnek

Bir $\widehat{ABC}$ nin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunu gösterelim.

Çözüm



[BC] // DE olacak şekilde A noktasından geçen DE doğrusunu çizersek $\widehat{EAC}$ ile $\widehat{ACB}$ nın; $\widehat{DAB}$ ile $\widehat{ABC}$ nın iç ters açılar olduğu görülür.

Üçgenin iç açılarını ölçüsü a, b, c olsun.

İç ters açıların ölçüleri eşit olduğundan $m(\widehat{DAB}) = b$ ve $m(\widehat{EAC}) = c$ olur.

$\widehat{DAE}$ doğru açı olduğundan $a + b + c = 180°$ bulunur.

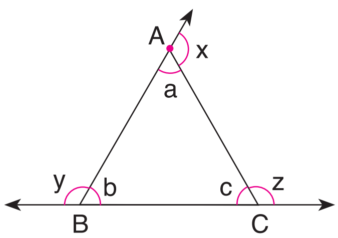
Bilgi Kutusu

Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.

Örnek

Bir $\widehat{ABC}$ nin dış açılarının ölçüleri toplamının 360° olduğunu gösterelim.

Çözüm



Üçgenin iç açılarının ölçüleri a, b, c ve dış açılarının ölçüleri x, y, z olsun.

Üçgenin her bir köşesindeki iç açı ile dış açı doğru açı oluşturduğundan toplamları 180° olur. O hâlde

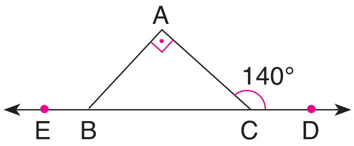
$$\begin{aligned} a + x &= 180° \\ b + y &= 180° \\ +\quad c + z &= 180° \\ \hline \underbrace{a + b + c} + x + y + z &= 540° \end{aligned}$$

$180° + x + y + z = 540° \Rightarrow x + y + z = 360°$ bulunur.

Bilgi Kutusu

Bir üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.

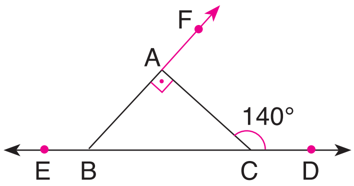
Örnek



ABC bir üçgen ve E, B, C, D noktaları doğrusaldır.

$[BA] \perp [AC]$ ve $m(\widehat{ACD}) = 140°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABE})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$\widehat{BAC}$ ile $\widehat{CAF}$ bütünler açılar olup

$m(\widehat{CAF}) = 180° - 90° = 90°$ dir.

$m(\widehat{CAF}) + m(\widehat{ABE}) + m(\widehat{ACD}) = 360°$

$\Rightarrow 90° + m(\widehat{ABE}) + 140° = 360°$

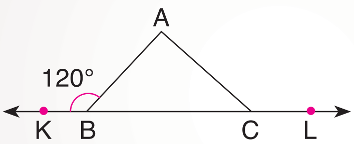
$\Rightarrow m(\widehat{ABE}) = 130°$ bulunur.

Farabi
(870-950)

Mantık, matematik, felsefe, psikoloji, politika, ahlâk, dil bilgisi, astronomi, müzik, metafizik konuları ile ilgilenmiş Türk düşünürüdür.

Matematik üzerine olan çalışmalarının çoğu düzlem geometri ve geometrik şekillerin çizimleri üzerinedir. Çizimlerinde pergel ve cetveli ustalıkla kullanmıştır.

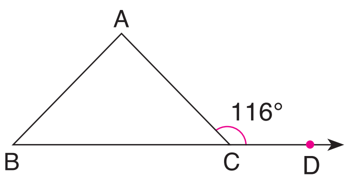
Sıra Sizde



Şekilde ABC üçgen ve K, B, C, L noktaları doğrusaldır.

$m(\widehat{ABK}) = 120°$ ve $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ACL}) = 200°$ olduğuna göre $m(\widehat{ACB})$ kaç derecedir?

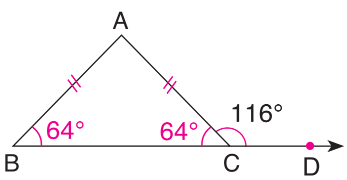
Örnek



ABC bir üçgen ve B, C, D noktaları doğrusaldır.

$m(\widehat{ACD}) = 116°$ ve $|AB| = |AC|$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$\widehat{ACB}$ ile $\widehat{ACD}$ komşu bütünler açılardır.

$m(\widehat{ACB}) = 180° - 116° = 64°$ dir.

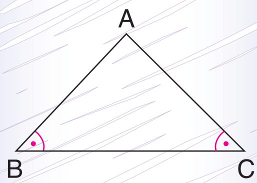
$|AB| = |AC|$ olduğundan

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 64°$ dir.

$\widehat{ABC}$ nin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan

$m(\widehat{BAC}) = 180° - (64° + 64°) = 180° - 128° = 52°$ bulunur.

! İki kenarının uzunluğu eşit olan üçgenlere **ikizkenar üçgen** denir.



$|AB| = |AC|$ ise

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB})$ olur.

Sabit bin Kurra (834-901)

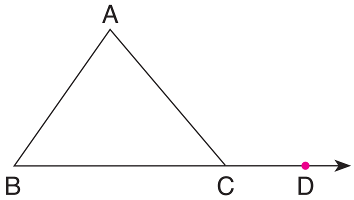
Matematikçi, doktor ve düşünür olan Kurra yüksek matematiğin yorumcusudur.

Yunan matematik kitaplarını Arapçaya çevirmiş, açıklamalar, yorumlar yaparken birçok genelleştirme yapmıştır. Pisagor teoremini herhangi bir üçgen için genelleştirmiş, bu teoremin geometrik yöntemle birkaç ispatını yapmıştır. Yunanlıların birçok buluşunu İslam dünyasına tanıtmıştır.

Ömer Hayyam (1044-1123)

İranlı edebiyatçı ve matematikçi olan Ömer Hayyam'ın Cebir adlı kitabı matematik dünyasında uzun süre etkili olmuştur. Kübik denklemleri incelemiş, denklemleri sınıflandırmıştır. Hayyam, Pascal üçgeni olarak bilinen üçgenle ilgili de bir kitap yazmış ve Pascal'dan yıllar önce bu üçgenin özelliklerini incelemiştir. Öklid dışı geometri anlayışının temellerini atmıştır.

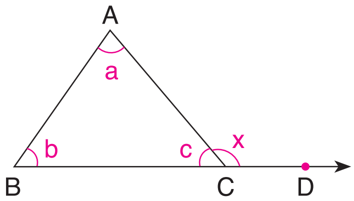
Örnek



ABC bir üçgen ve B, C, D noktaları doğrusaldır.

$m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ABC})$ olduğunu gösterelim.

Çözüm



$m(\widehat{ACD}) = x$, $m(\widehat{BAC}) = a$,

$m(\widehat{ABC}) = b$ ve $m(\widehat{ACB}) = c$ olsun.

$a + b + c = 180°$ ve $x + c = 180°$ dir.

$a + b + c = 180° \Rightarrow c = 180° - a - b$ dir.

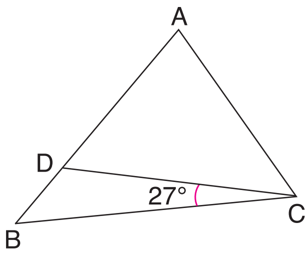
$x + c = 180° \Rightarrow x + 180° - a - b = 180° \Rightarrow x = a + b$ olur.

O hâlde $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ABC})$ bulunur.

Bilgi Kutusu

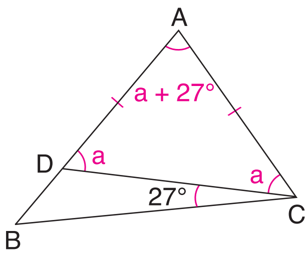
Bir üçgende bir dış açının ölçüsü kendine komşu olmayan iki iç açının ölçülerinin toplamına eşittir.

Örnek



ABC üçgeninde, $D \in [AB]$, $|AD| = |AC|$, $|AB| = |BC|$ ve $m(\widehat{DCB}) = 27°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$|AD| = |AC|$ olduğundan

$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ACD}) = a$ olsun.

$|AB| = |BC| \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = a + 27°$ olur.

$\overset{\triangle}{ADC}$ üçgeninde

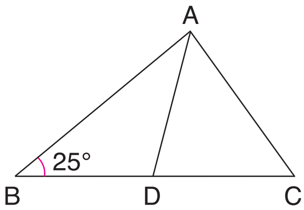
$a + a + a + 27° = 180° \Rightarrow 3a = 153°$

$\Rightarrow a = 51°$ dir.

Buradan $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB}) = a + 27° = 51° + 27° = 78°$ olur.

O hâlde $m(\widehat{ABC}) = 180° - (78° + 78°) = 24°$ bulunur.

Örnek

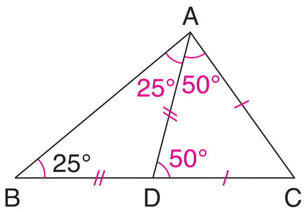


$\widehat{ABC}$ nde B, D, C noktaları doğrusal,

$|AD| = |DB|$ ve $|AC| = |CD|$ dur.

$m(\widehat{ABD}) = 25°$ olduğuna göre $m(\widehat{ACB})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$|AD| = |DB| \Rightarrow m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BAD}) = 25°$ dir.

$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{BAD})$

$= 25° + 25° = 50°$ dir.

$|AC| = |CD| \Rightarrow m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{CAD}) = 50°$ olur.

$\widehat{ADC}$ nin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan

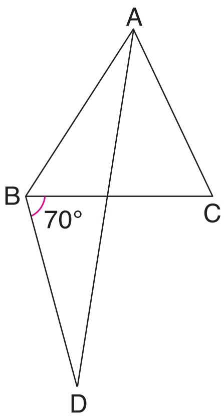
$m(\widehat{ACB}) = 180° - (50° + 50°) = 80°$ bulunur.

Battani

(858-929)

Arap gök bilimcisi ve matematikçisidir. Gök bilimle ilgili hesaplamalar yaparken trigonometri kullanmıştır. Kotanjant fonksiyonunun her dereceden tablosunu yapmış, küresel üçgenlerdeki kosinüs kuralını tanıtmıştır.

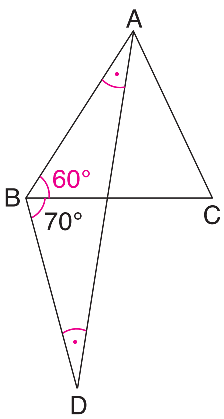
Örnek



ABC eşkenar üçgen ve ABD üçgeninde $|AB| = |BD|$ dur.

$m(\widehat{DBC}) = 70°$ olduğuna göre $m(\widehat{DAC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



ABC eşkenar üçgen olduğu için

$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 60°$ dir.

$\widehat{ABD}$ nde

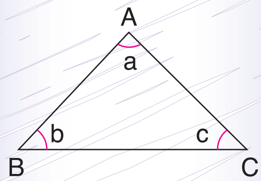
$|AB| = |BD| \Rightarrow m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ADB})$

$= \dfrac{180° - (60° + 70°)}{2}$

$= 25°$ olur.

O hâlde $m(\widehat{DAC}) = 60° - 25° = 35°$ olur.

! Üç kenarının uzunluğu birbirine eşit olan üçgenlere **eşkenar üçgen** denir.



$a = b = c = 60°$ dir.

1. Tümler iki açıdan biri diğerinin 2 katından 15° eksiktir.

Bu açıların ölçülerini bulunuz.

2. Ölçüleri x, y, z olan üç açı ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

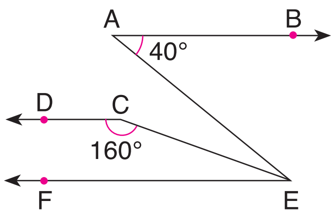
- Ölçüleri x ve y olan açılar bütünler açılardır.
- Ölçüleri y ve z olan açılar tümler açılardır.
- $x + z = 150°$ dir.

Buna göre x, y, z kaç derecedir?

3. $(x + 27°)$ dik açı olduğuna göre yandaki tabloda ölçüleri verilen açıların çeşidini ilgili kutucuklara yazınız.

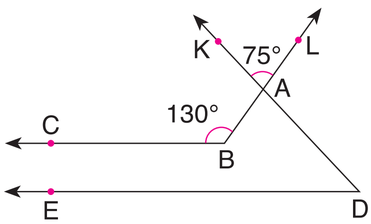
Açının ölçüsü	Açının çeşidi
$2x + 30°$	
$3x – 9°$	
$x + 10°$	

4.



[AB // [CD // [EF, $m(\widehat{BAE}) = 40°$ ve $m(\widehat{DCE}) = 160°$ olduğuna göre $m(\widehat{AEC})$ kaç derecedir?

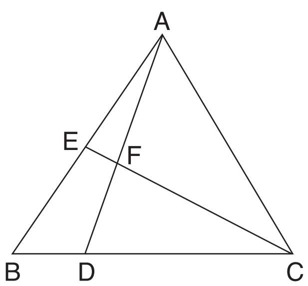
5.



Şekilde [BC // [DE ve $[BL \cap [DK = \{A\}$ dır.

$m(\widehat{KAL}) = 75°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 130°$ olduğuna göre $m(\widehat{ADE})$ kaç derecedir?

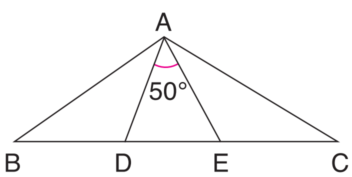
6.



ABC üçgeninde $E \in [AB]$, $D \in [BC]$ ve $[AD] \cap [CE] = \{F\}$ dir.

$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ECB})$ ve $m(\widehat{ACB}) = 60°$ olduğuna göre $m(\widehat{AFE})$ kaç derecedir?

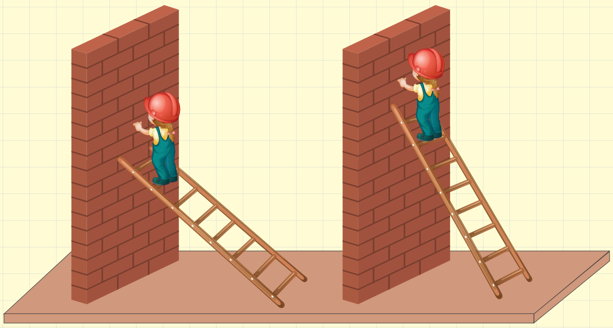
7.



ABC üçgen ve B, D, E, C noktaları doğrusaldır.

$|AD| = |DB|$, $|AE| = |EC|$ ve $m(\widehat{DAE}) = 50°$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

9.4.1.2. Üçgenin Kenar Uzunlukları ile Bu Kenarların Karşılarındaki Açıların Ölçüleri Arasındaki İlişkiler

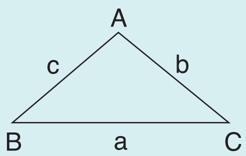


Boyacı, duvarın üst kısımlarına ulaşmak için I. konumdaki merdiveni II. konuma getiriyor. Merdiven II. konuma getirildiğinde, merdivenin duvarla arasında oluşan açının ölçüsünün I. konumdakine göre küçük olduğu; merdivenin zeminle arasında oluşan açının ölçüsünün de I. konumdakine göre büyük olduğu görülür.

» I. ve II. konumda merdivenin duvarla ve zeminle arasında oluşan açılardaki değişim; merdivenin duvara değdiği noktanın yüksekliğini ve merdivenin duvara uzaklığını nasıl etkiler?

Bilgi Kutusu

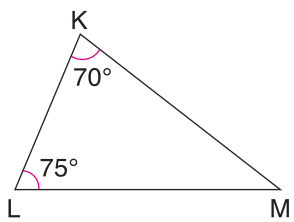
Bir üçgende ölçüleri eşit olmayan iki açıdan ölçüsü büyük olan açının karşısındaki kenarın uzunluğu, ölçüsü küçük olan açının karşısındaki kenarın uzunluğundan büyüktür.



$a > b > c$ ise

$m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{BCA})$ dür.

Örnek



$\widehat{KLM}$ nde $m(\widehat{LKM}) = 70°$ ve $m(\widehat{KLM}) = 75°$ dir.

Buna göre $\widehat{KLM}$ nin kenar uzunluklarını sıralayalım.

Çözüm

$\widehat{KLM}$ nde $m(\widehat{KML}) = 180° - (70° + 75°) = 35°$ dir.

$m(\widehat{KLM}) > m(\widehat{LKM}) > m(\widehat{KML})$ olduğundan $|KM| > |LM| > |KL|$ dur.

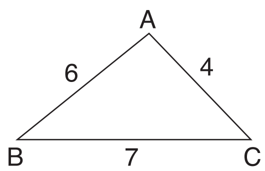
Sıra Sizde

Bir $\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{BAC}) = 83°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 41°$ dir.
Buna göre bu üçgenin kenar uzunluklarını sıralayınız.

Örnek

Bir $\widehat{ABC}$ nin kenar uzunlukları $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 4$ cm ve $|BC| = 7$ cm olduğuna göre bu üçgenin açı ölçülerini sıralayalım.

Çözüm

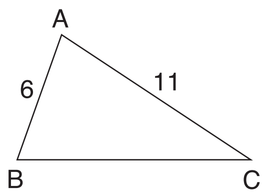


Verilen kenar uzunluklarını sıralarsak

$|BC| > |AB| > |AC|$ dur.

Buradan $m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{ACB}) > m(\widehat{ABC})$ olur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nin iç açılarının ölçüleri arasında
$m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{ACB})$
bağıntısı vardır.
$|AB| = 6$ cm ve $|AC| = 11$ cm olduğuna göre $|BC|$ nun santimetre cinsinden alabileceği tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm

$m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{ACB}) \Rightarrow 11 > |BC| > 6$ olur.

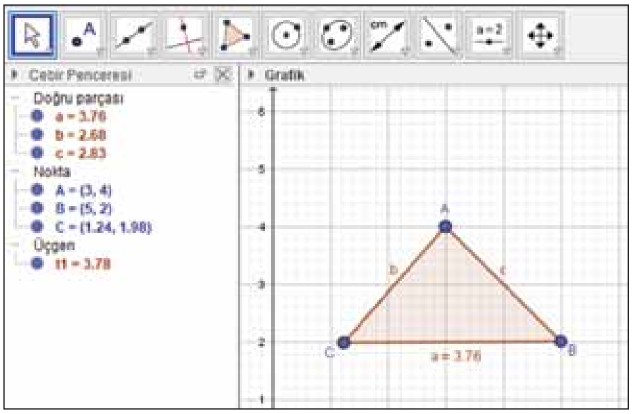
O hâlde $|BC|$ nun alabileceği tam sayı değerleri santimetre cinsinden 7, 8, 9, 10 olur.

Örnek

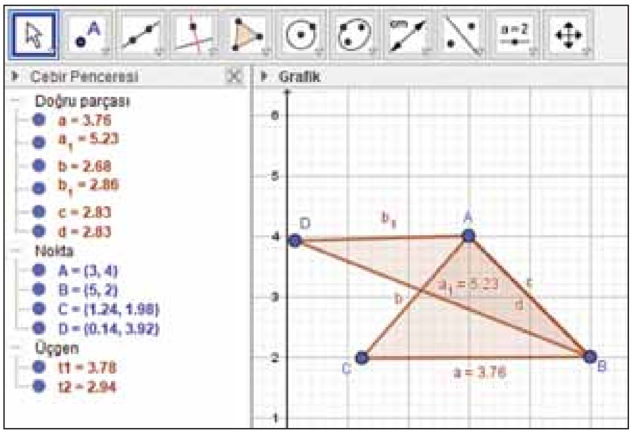
Üçgenlerin kenar ve açıları arasındaki ilişkiyi dinamik matematik programı yardımıyla inceleyelim.

Çözüm

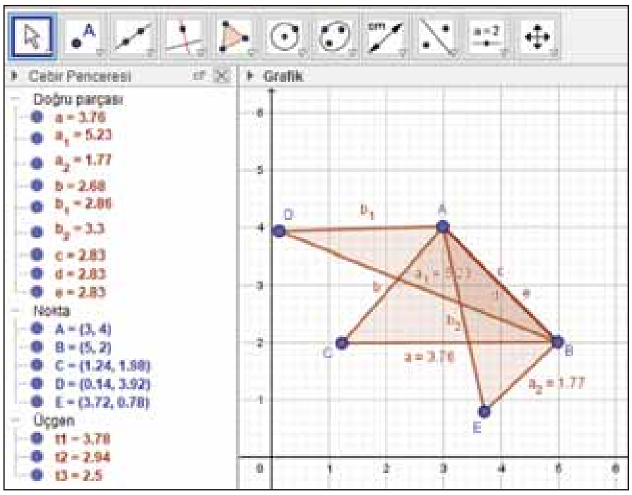
Dinamik matematik programlarından Geogebra programını kullanalım. Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayalım. Ardından grafik penceresinde üç farklı noktayı birleştirerek bir ABC üçgeni çizelim. Çizdiğimiz bu üçgende "Araç Çubuğu"ndaki "Uzaklık veya Uzunluk" kısmından yararlanarak BC kenarının uzunluğunu gösterelim. $|BC| = a = 3,76$ olduğunu görürüz.



Çizdiğimiz bu üçgenin A açısının ölçüsünü büyüterek ABD üçgenini oluşturalım. Daha sonra BD kenarının uzunluğunu gösterelim.
|BD| = a_1 = 5,23 olduğunu görürüz.

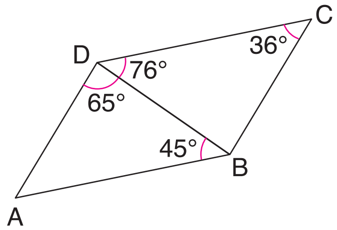


A açısının ölçüsünü ilk duruma göre küçülterek ABE üçgeninin oluşturalım. Daha sonra BE kenarının uzunluğunu gösterelim.
|BE| = a_2 = 1,77 olduğunu görürüz.



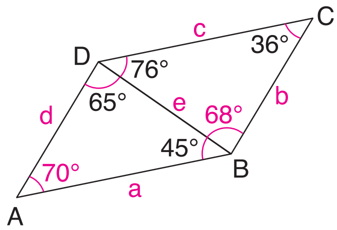
Sonuç olarak açının ölçüsü küçüldükçe karşısındaki kenarın uzunluğunun küçüldüğü, büyüdükçe karşısındaki kenarın uzunluğunun büyüdüğü görülmektedir.

Örnek



ABCD dörtgeninde [DB] köşegendir. $m(\widehat{ADB}) = 65°$, $m(\widehat{DBA}) = 45°$, $m(\widehat{BDC}) = 76°$ ve $m(\widehat{DCB}) = 36°$ olduğuna göre bu dörtgenin en uzun kenarının hangisi olduğunu bulalım.

Çözüm



$\widehat{ADB}$ ve $\widehat{DBC}$ nde verilmeyen açıların ölçülerini bulalım.

$m(\widehat{DAB}) = 180° - (65° + 45°) = 70°$ ve

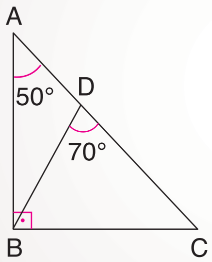
$m(\widehat{DBC}) = 180° - (76° + 36°) = 68°$ dir.

$\widehat{ADB}$ nde $m(\widehat{DAB}) > m(\widehat{ADB}) > m(\widehat{DBA}) \Rightarrow e > a > d$ dir. ... (I)

$\widehat{DBC}$ nde $m(\widehat{BDC}) > m(\widehat{DBC}) > m(\widehat{DCB}) \Rightarrow b > c > e$ dir. ... (II)

I ve II den $b > c > e > a > d$ olup BC kenarı en uzun kenardır.

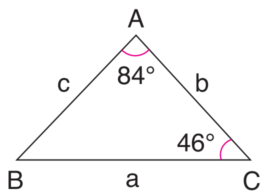
Sıra Sizde



$\widehat{ABC}$ üçgeninde $D \in [AC]$, $[AB] \perp [BC]$, $m(\widehat{BAC}) = 50°$ ve $m(\widehat{BDC}) = 70°$ dir.

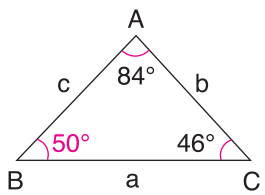
[AD], [DC], [BD] ve [BC] nın uzunluklarını sıralayınız.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{ACB}) = 46°$, $m(\widehat{BAC}) = 84°$, $|AB| = c$ cm, $|AC| = b$ cm ve $|BC| = a$ cm olduğuna göre $|b - a| - |a - c| + b$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm



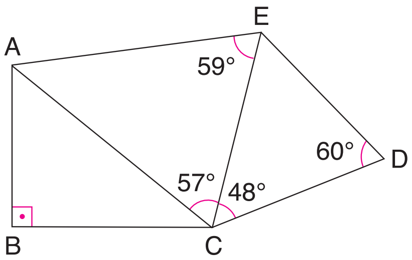
$m(\widehat{ABC}) = 180° - (46° + 84°) = 50°$ dir.

Bu durumda $m(\widehat{ACB}) < m(\widehat{ABC}) < m(\widehat{BAC})$ olur. Dolayısıyla $c < b < a$ dır.

$b < a \Rightarrow b - a < 0$ ve $c < a \Rightarrow a - c > 0$ dır.

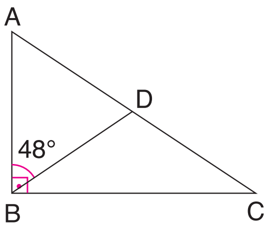
Buna göre $|b - a| - |a - c| + b = -b + a - a + c + b = c$ olur.

1.



ABCDE çokgeninde $[AB] \perp [BC]$, $m(\widehat{ACE}) = 57^\circ$, $m(\widehat{AEC}) = 59^\circ$, $m(\widehat{ECD}) = 48^\circ$ ve $m(\widehat{CDE}) = 60^\circ$ olduğuna göre çokgenin en uzun kenarı hangisidir?

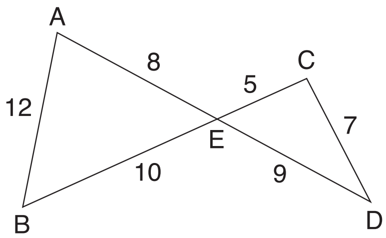
2.



$\widehat{ABC}$ nde $D \in [AC]$ ve $[AB] \perp [BC]$ dir.

$|AB| = |BD|$, $m(\widehat{ABD}) = 48^\circ$ olduğuna göre $|AB|$, $|BC|$, $|DC|$, $|AD|$ uzunluklarını sıralayınız.

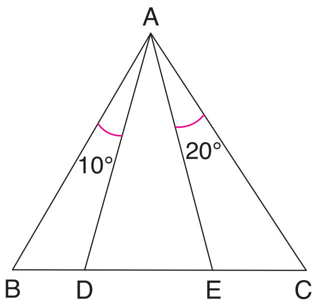
3.



Şekilde $[AD] \cap [BC] = \{E\}$ dir.

$|AB| = 12$ cm, $|AE| = 8$ cm, $|BE| = 10$ cm, $|EC| = 5$ cm, $|ED| = 9$ cm ve $|CD| = 7$ cm olduğuna göre ABE ve CDE üçgenlerinde ölçüsü en büyük olan açı hangisidir?

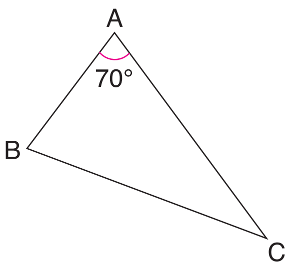
4.



ABC eşkenar üçgeninde D ve E noktaları [BC] nın üzerindedir.

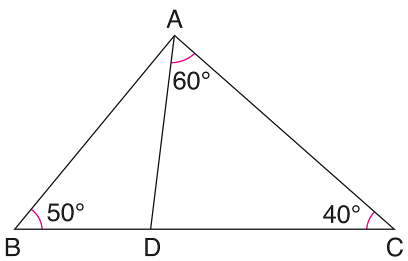
$m(\widehat{BAD}) = 10^\circ$ ve $m(\widehat{EAC}) = 20^\circ$ olduğuna göre $\widehat{ADE}$ nin kenar uzunluklarını sıralayınız.

5.



$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{BAC}) = 70^\circ$ ve $|AB| < |AC|$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ nün hangi aralıkta değer alacağını bulunuz.

6.



$\widehat{ABC}$ nde $D \in [BC]$ dır. $m(\widehat{ABC}) = 50^\circ$, $m(\widehat{ACB}) = 40^\circ$ ve $m(\widehat{DAC}) = 60^\circ$ olduğuna göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanları belirleyiniz.

I. $|DC| > |AD|$

II. $|BD| > |AD|$

III. $|AC| > |DC|$

IV. $|BD| > |DC|$

9.4.1.3. Uzunlukları Verilen Üç Doğru Parçasının Hangi Durumlarda Üçgen Oluşturduğunun Değerlendirilmesi

Çevresi 24 cm olan bir üçgen çiziliyor.

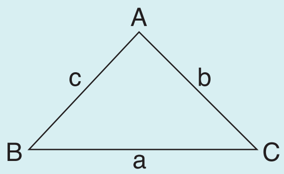
- 4 cm, 8 cm, 12 cm
- 6 cm, 8 cm, 10 cm
- 6 cm, 9 cm, 9 cm
- 5 cm, 5 cm, 14 cm

» Yukarıda uzunlukları verilen doğru parçalarından hangileri bu üçgenin kenarları olabilir?

! Farklı doğrular üzerinde bulunan üç doğru parçasının uç uca birleştirilmesi ile üçgen elde edilemeyebilir.

Bilgi Kutusu

Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük, farkının mutlak değerinden büyüktür. Bu eşitsizliğe **üçgen eşitsizliği** denir.



$|b - c| < a < b + c$

$|a - c| < b < a + c$

$|a - b| < c < a + b$

Örnek

Aşağıda uzunlukları verilen doğru parçalarının bir üçgenin kenarları olup olamayacağını bulalım.

a) 4 cm, 8 cm, 10 cm **b)** 1 cm, 3 cm, 4 cm

Çözüm

a) $8 - 4 < 10 < 8 + 4 \Rightarrow 4 < 10 < 12$

$10 - 8 < 4 < 10 + 8 \Rightarrow 2 < 4 < 18$

$10 - 4 < 8 < 10 + 4 \Rightarrow 6 < 8 < 14$ olur.

Üçgen eşitsizliğini sağladığı için bu doğru parçaları bir üçgenin kenarları olabilir.

b) $3 - 1 < 4 < 3 + 1 \Rightarrow 2 < 4 < 4$ eşitsizliği doğru bir önerme olmadığı için bu doğru parçaları bir üçgenin kenarları olamaz.

Sıra Sizde

3 cm, 4 cm, 5 cm uzunluğundaki üç çubuğu uc uca ekleyerek üçgen oluşturabilir misiniz?

Örnek

Bir $\widehat{ABC}$ nde $|AB| = 4$ cm ve $|AC| = 9$ cm olduğuna göre $|AC|$ nun santimetre cinsinden alabileceği tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm

$9 - 4 < |BC| < 9 + 4 \Rightarrow 5 < |BC| < 13$ olur.

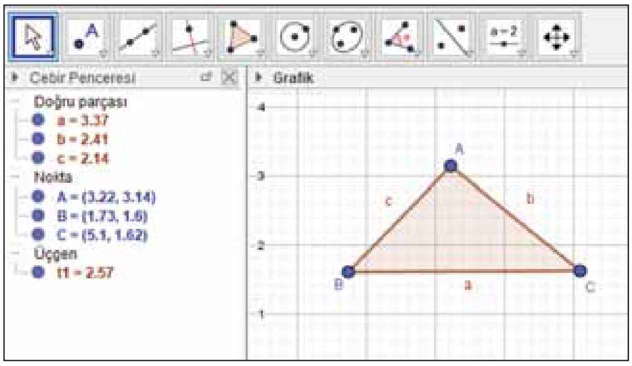
Bu durumda $|BC|$ nun santimetre cinsinden alabileceği tam sayı değerleri 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 dir.

Örnek

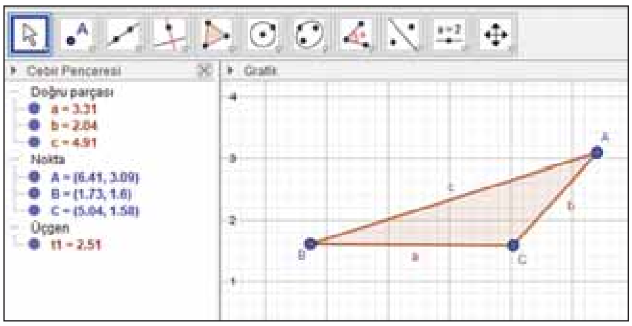
Üç doğru parçası kullanılarak hangi durumlarda üçgen oluşturulabileceğini dinamik matematik programı yardımıyla inceleyelim.

Çözüm

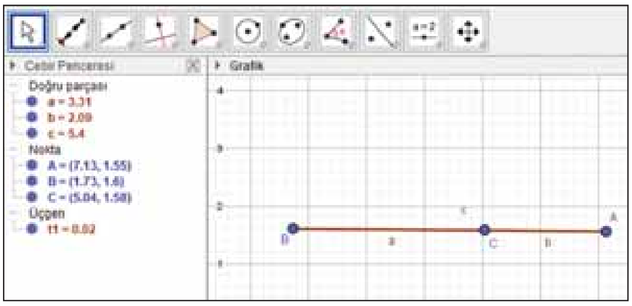
Dinamik matematik programlarından Geogebra programını kullanalım. Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayalım. Ardından grafik penceresinde üç farklı noktayı birleştirerek bir ABC üçgeni oluşturalım.



"Araç Çubuğu"ndaki "Noktayı Bağla / Ayır" kısmına tıklayarak oluşturduğumuz ABC üçgeninin A köşesini oynatalım.



Aynı şekilde A köşesini B ve C noktalarıyla doğrusal olacak şekilde oynatalım. Bu durumda c = a + b olduğu ve şeklin üçgen olmadığı görülür.



Sonuç olarak bir üçgende bir kenarın uzunluğunun diğer iki kenarın uzunluklarının toplamından küçük, farklarının mutlak değerinden büyük olduğu görülmektedir.

Örnek

Bir $\overset{\frown}{ABC}$ nde $|AB| = (2x + 1)$ cm, $|AC| = (x + 4)$ cm, $|BC| = 10$ cm ve x bir tam sayı olduğuna göre $|AC|$ nun en fazla kaç santimetre olacağını bulalım.

Çözüm

$|2x + 1 - (x + 4)| < 10 < 2x + 1 + x + 4 \Rightarrow |x - 3| < 10 < 3x + 5$

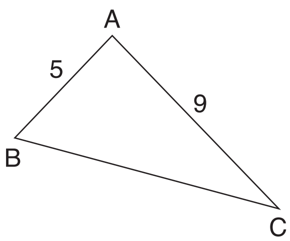
$\Rightarrow |x - 3| < 10$ ve $10 < 3x + 5 \Rightarrow -10 < x - 3 < 10$ ve $5 < 3x$

$\Rightarrow -7 < x < 13$ ve $\frac{5}{3} < x \Rightarrow \frac{5}{3} < x < 13$ olur.

x in alabileceği en büyük değer 12 dir.

O hâlde $|AC| = x + 4 = 12 + 4 = 16$ cm bulunur.

Örnek



$\overset{\frown}{ABC}$ nde $|AB| = 5$ cm, $|AC| = 9$ cm ve $m(\widehat{BAC}) < 90°$ olduğuna göre $|BC|$ nun santimetre cinsinden alabileceği en büyük tam sayı değerini bulalım.

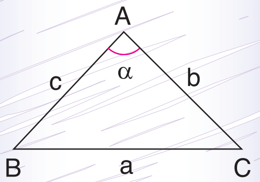
Çözüm

$9 - 5 < |BC| < 9 + 5$ ve $|BC|^2 < 5^2 + 9^2$

$\Rightarrow 4 < |BC| < 14$ ve $|BC|^2 < 106$

$\Rightarrow 4 < |BC| < 14$ ve $|BC| < \sqrt{106} \Rightarrow 4 < |BC| < \sqrt{106}$ dır.

Buradan $|BC|$ nun santimetre cinsinden alabileceği en büyük tam sayı değeri 10 olur.

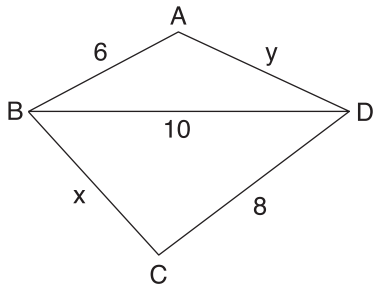


$\alpha > 90° \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$

$\alpha < 90° \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$

dir.

Örnek



Şekilde $m(\widehat{BAD}) > 90°$,

$|AB| = 6$ cm, $|CD| = 8$ cm,

$|BD| = 10$ cm, $|AD| = y$ cm,

$|BC| = x$ cm'dir.

ABCD dörtgeninin çevresi bir tam sayı olduğuna göre en fazla kaç santimetre olacağını bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABD}$ nde $10 - 6 < y < 10 + 6 \Rightarrow 4 < y < 16$ dır.

$10^2 > 6^2 + y^2 \Rightarrow 100 - 36 > y^2 \Rightarrow y^2 < 64 \Rightarrow y < 8$ olur.

Buradan $4 < y < 8$ olur.

$\widehat{BCD}$ nde $10 - 8 < x < 10 + 8 \Rightarrow 2 < x < 18$ olur.

$4 < y < 8$

$+ \; 2 < x < 18$

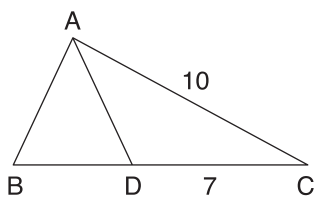
$6 < x + y < 26$ bulunur.

Dörtgenin çevresi $6 + 8 + x + y = 14 + x + y$ olduğundan

$6 + 14 < x + y + 14 < 26 + 14 \Rightarrow 20 < x + y + 14 < 40$ bulunur.

O hâlde ABCD dörtgeninin çevresi tam sayı olarak en fazla 39 cm olur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $D \in [BC]$, $|AB| = |AD|$,

$|AC| = 10$ cm ve $|DC| = 7$ cm'dir.

$|AD|$ bir tam sayı olduğuna göre $|AD|$ nun en fazla kaç santimetre olacağını bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABD}$ ikizkenar üçgen olduğu için $\widehat{ABD}$ ve $\widehat{ADB}$ dar açılar, $\widehat{ADC}$ geniş açıdır.

$|AB| = |AD| = x$ olsun. $m(\widehat{ADC}) > 90°$ olduğundan

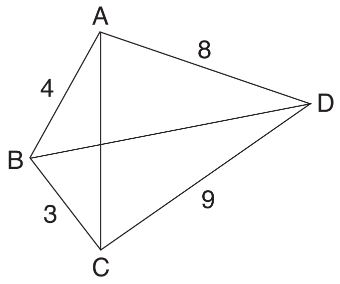
$10 - 7 < x < 10 + 7$ ve $10^2 > 7^2 + x^2 \Rightarrow 3 < x < 17$ ve $51 > x^2$ olur.

Buradan $3 < x < 17$ ve $x < \sqrt{51}$ olduğundan $3 < x < \sqrt{51}$ bulunur.

O hâlde $|AD|$ tam sayı olarak en fazla 7 cm olur.

1. Bir $\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{BAC}) > 90°$, $|AC| = 4$ cm ve $|BC| = 9$ cm olduğuna göre $|AB|$ nun santimetre cinsinden alabileceği kaç tam sayı değeri vardır?

2.

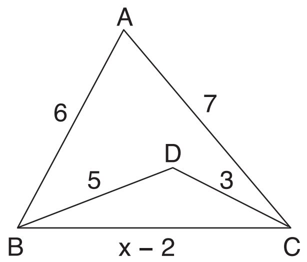


ABCD dörtgeninde [AC] ve [BD] köşegendir.

$|AB| = 4$ cm, $|AD| = 8$ cm, $|BC| = 3$ cm ve $|CD| = 9$ cm olduğuna göre $|AC| + |BD|$ nun santimetre cinsinden alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

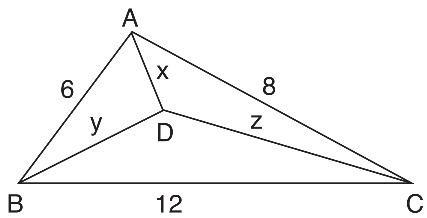
3. Çevresi 22 cm ve kenar uzunlukları birer tam sayı olan kaç farklı üçgen çizilebilir?

4.



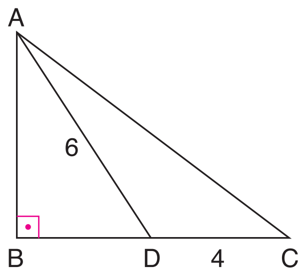
$\widehat{ABC}$ üçgeninde $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 7$ cm, $|BD| = 5$ cm, $|DC| = 3$ cm, $|BC| = (x - 2)$ cm ve x tam sayı olduğuna göre $|BC|$ en fazla kaç santimetredir?

5.



$\widehat{ABC}$ nde $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 8$ cm, $|BC| = 12$ cm, $|AD| = x$ cm, $|BD| = y$ cm ve $|DC| = z$ cm olduğuna göre $x + y + z$ en az kaç santimetredir?

6.



$\widehat{ABC}$ nde $D \in [BC]$, $[AB] \perp [BC]$, $|DC| = 4$ cm ve $|AD| = 6$ cm olduğuna göre $|AC|$ nin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

9.4.2. ÜÇGENLERDE EŞLİK VE BENZERLİK

Miniatürk, Türkiye'den ve Türkiye sınırları dışında kalmış Osmanlı eserlerinden seçilen mimari eserlerin %25 oranında küçültülmüş minyatür modellerinin sergilendiği, 60 000 metrekareyle dünyadaki en büyük minyatür parktır. 3000 yıl öncesine dek uzanan, barış ve adaletin hüküm sürdüğü uygarlıkların bıraktığı izler bir araya getirilmiştir. "Büyük Ülkenin Küçük Bir Modeli" sloganıyla yola çıkan Miniatürk, Türkiye'nin vitrini olmuştur.

- Siz de çevrenizde birbirine benzeyen veya birbiri ile eş olan cisimlere, yapılara örnekler veriniz.

Sembol ve Gösterimler

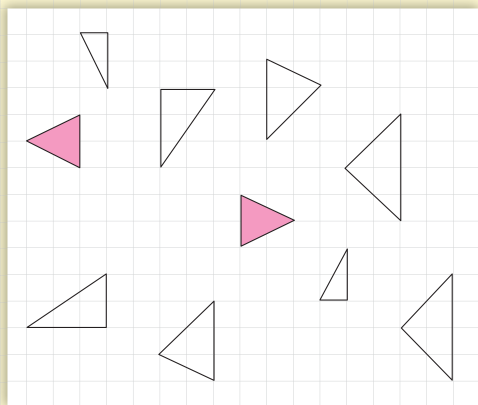
$\cong$

$\sim$

$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$

9.4.2.1. İki Üçgenin Eş Olması İçin Gereken Asgari Koşullar



Kareli zeminde verilen pembe boyalı üçgenler birbirine eştir.

» Üçgenlerin eş olması için gereken şartları hatırlayarak birbirine eş olan diğer üçgenleri belirleyiniz.

! Eş iki üçgen arasındaki eşlik ifadesi yazılırken üçgenlerin köşelerinin yazım sırası önemlidir.

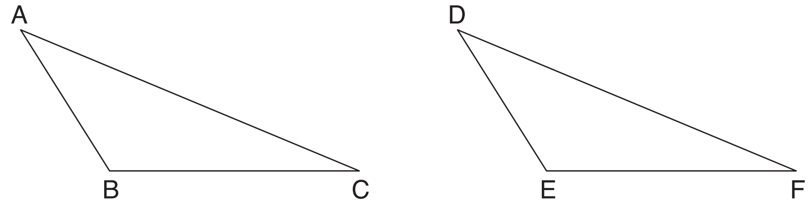
Bilgi Kutusu

Karşılıklı olarak kenarlarının uzunlukları ve açılarının ölçüleri eşit olan üçgenler eş üçgenlerdir.

$\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ eş üçgenler ise $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ şeklinde gösterilir.

Kenar-Açı-Kenar (K.A.K.) Eşlik Kuralı

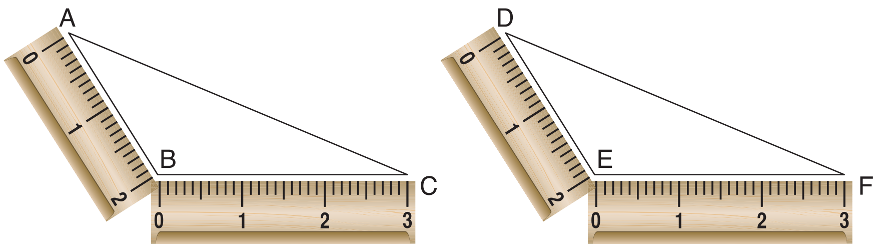
Örnek



$\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ nin eş üçgenler olduğunu ölçümler yaparak gösterelim.

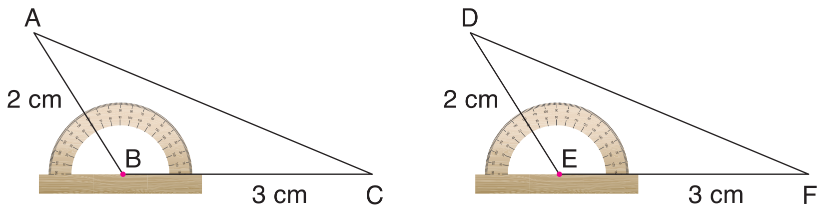
Çözüm

Verilen üçgenlerin ikişer kenarının uzunluklarını cetvel yardımıyla ölçelim.



Ölçüm sonucunda, $|AB| = |DE| = 2$ cm, $|BC| = |EF| = 3$ cm olduğunu görürüz.

Açıölçer yardımıyla $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ nı ölçelim.



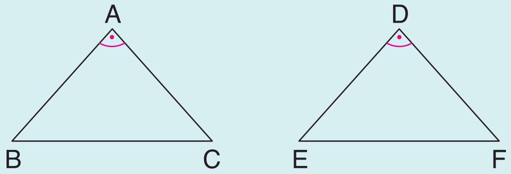
Ölçüm sonucunda, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF}) = 120°$ olduğunu görürüz.

Bu iki üçgenin eş üçgen olup olmadığını anlamak için üçüncü kenarlarının uzunluklarını da cetvel yardımıyla ölçersek $|AC| = |DF|$ olduğunu görürüz.

O hâlde karşılıklı olarak ikişer kenarlarının uzunlukları eşit ve bu kenarların oluşturduğu açıların eş olduğu ABC üçgeni ile DEF üçgeni eş üçgenlerdir.

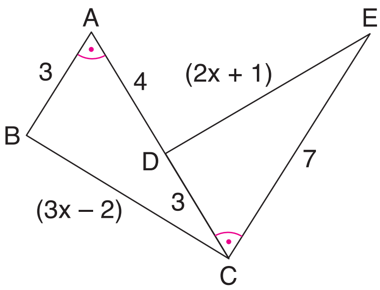
Bilgi Kutusu

Karşılıklı iki kenarının uzunluğu ve bu iki kenarın oluşturduğu açıların ölçüleri eşit olan üçgenler eştir. Bu durum Kenar-Açı-Kenar (K.A.K.) Eşliği olarak adlandırılır.



$|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$ ve $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDF})$ ise
$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ olur.

Örnek



Şekilde A, D, C noktaları doğrusal, $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DCE})$, $|AB| = |DC| = 3$ cm, $|AD| = 4$ cm, $|CE| = 7$ cm, $|DE| = (2x + 1)$ cm ve $|BC| = (3x - 2)$ cm olduğuna göre $|BC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

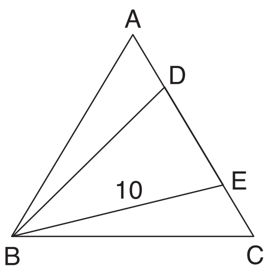
Çözüm

$|BA| = |DC| = 3$ cm, $|AC| = |CE| = 7$ cm ve $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DCE})$ olduğundan K.A.K. eşlik kuralı gereğince $\widehat{BAC} \cong \widehat{DCE}$ dir.

Buradan $|BC| = |DE|$ olup $3x - 2 = 2x + 1 \Rightarrow x = 3$ bulunur.

Bu durumda $|BC| = 3x - 2 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$ cm olur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ üçgeninde A, D, E, C noktaları doğrusal, $|BA| = |BC|$, $|AD| = |CE|$ ve $|BE| = 10$ cm olduğuna göre $|BD|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

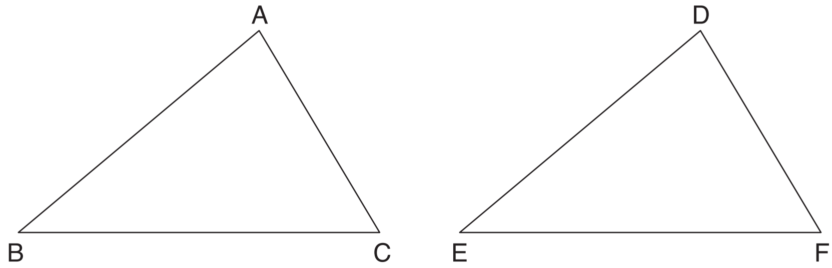
$|BA| = |BC| \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA})$ olur.

O hâlde K.A.K. eşlik kuralı gereğince $\widehat{BAD} \cong \widehat{BCE}$ dir.

Buradan $|BD| = |BE| = 10$ cm olur.

Açı-Kenar-Açı (A.K.A.) Eşlik Kuralı

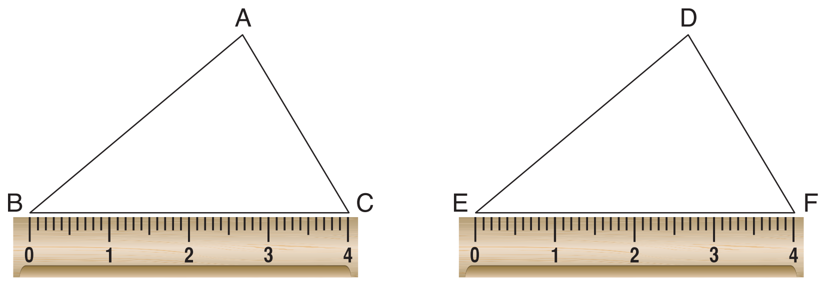
Örnek



$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ nin eş üçgenler olduğunu ölçümler yaparak gösterelim.

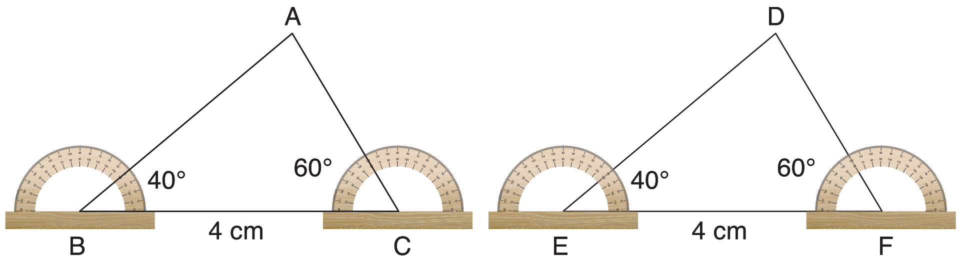
Çözüm

Verilen üçgenlerde $|BC|$ ve $|EF|$ nu cetvel yardımıyla ölçelim.



Ölçüm sonucunda, $|BC| = |EF| = 4$ cm olduğunu görürüz.

Açıölçer yardımıyla $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{DEF}$ ve $\widehat{DFE}$ nı ölçelim.



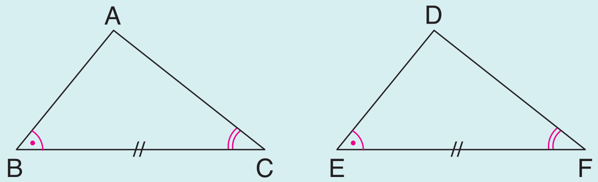
$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF}) = 40°$ ve $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DFE}) = 60°$ olduğunu görürüz.

Bu iki üçgenin eş üçgen olup olmadığını anlamak için diğer kenarlarının uzunluklarını da cetvel yardımıyla ölçersek $|AB| = |DE|$ ve $|AC| = |DF|$ olduğunu görürüz.

O hâlde karşılıklı olarak iki açılarının ölçüleri ve bu açıların arasındaki kenar uzunlukları eşit olan ABC üçgeni ile DEF üçgeni eş üçgenlerdir.

Bilgi Kutusu

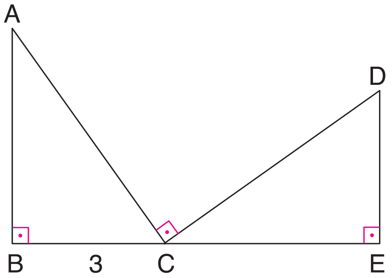
Karşılıklı iki açısının ölçüsü ve bu açıların arasındaki kenarlarının uzunlukları eşit olan üçgenler eştir. Bu durum Açı-Kenar-Açı (A.K.A.) Eşliği olarak adlandırılır.



$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF})$, $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DFE})$ ve

$|BC| = |EF|$ ise $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$ olur.

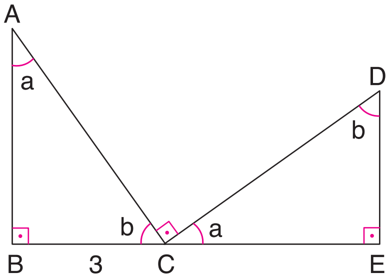
Örnek



Şekilde B, C, E noktaları doğrusal, $[AB] \perp [BE]$, $[DE] \perp [BE]$ ve $[AC] \perp [CD]$ dır.

$|AC| = |CD|$ ve $|BC| = 3$ cm olduğuna göre $|ED|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



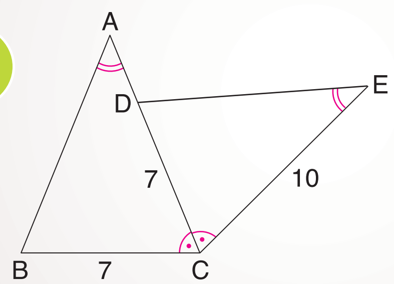
$m(\widehat{ECD}) = a$, $m(\widehat{CDE}) = b$ dersek $a + b = 90°$ olur.

Bu durumda $m(\widehat{ACB}) = b$ ve $m(\widehat{BAC}) = a$ olur.

$|AC| = |CD|$ olduğundan A.K.A. eşlik kuralı gereğince $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{CED}$ dir.

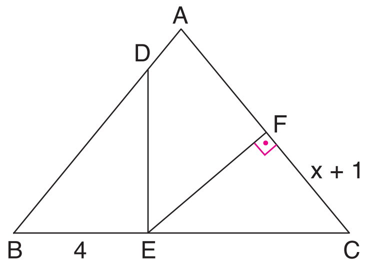
O hâlde $|ED| = |BC| = 3$ cm bulunur.

Sıra Sizde



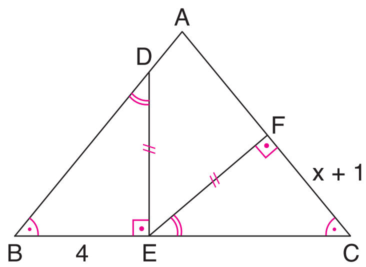
ABC ve DEC üçgenlerinde $D \in [AC]$, $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DCE})$, $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DEC})$, $|BC| = |DC| = 7$ cm ve $|EC| = 10$ cm olduğuna göre $|AD|$ kaç santimetredir?

Örnek



ABC üçgeninde $D \in [AB]$, $E \in [BC]$ ve $F \in [AC]$ dır.
$|AB| = |AC|$, $|DE| = |EF|$,
$[EF] \perp [AC]$, $m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{FEC})$,
$|BE| = 4$ cm ve $|CF| = (x + 1)$ cm olduğuna göre x in kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

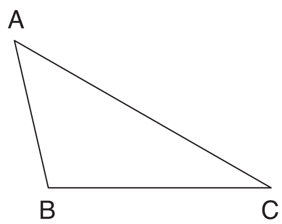


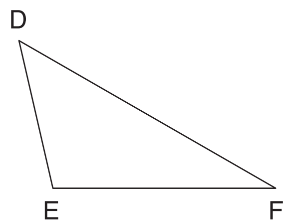
$|AB| = |AC| \Rightarrow m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB})$ olur.
$\overset{\triangle}{DBE}$ ile $\overset{\triangle}{ECF}$ nin ikişer açısı eşit ise $m(\widehat{EFC}) = m(\widehat{DEB}) = 90°$ olur.
$|DE| = |EF|$ olduğundan
A.K.A. eşlik kuralı gereğince
$\overset{\triangle}{DBE} \cong \overset{\triangle}{ECF}$ dir.

O hâlde $|BE| = |CF| \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$ cm bulunur.

Kenar-Kenar-Kenar (K.K.K.) Eşlik Kuralı

Örnek

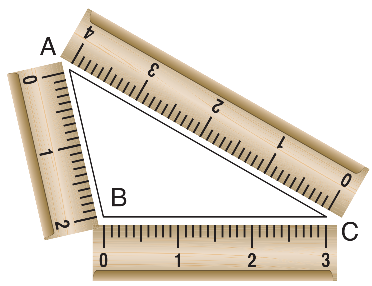


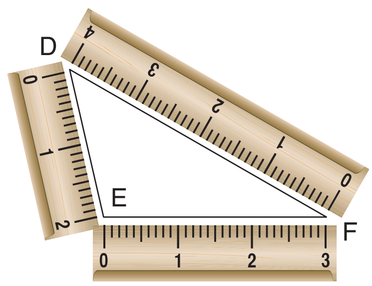


$\overset{\triangle}{ABC}$ ile $\overset{\triangle}{DEF}$ nin eş üçgenler olduğunu ölçümler yaparak gösterelim.

Çözüm

Verilen üçgenlerin kenar uzunluklarını cetvel yardımıyla ölçelim.



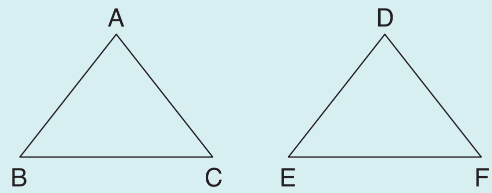


$|AB| = |DE| = 2$ cm, $|BC| = |EF| = 3$ cm ve $|AC| = |DF| = 4$ cm olduğunu görürüz.

Açıölçer yardımıyla $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ nin iç açılarını ölçersek $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDF})$ ve $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF})$ ve $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DFE})$ olduğunu görürüz. O hâlde karşılıklı olarak tüm kenarlarının uzunlukları eşit olan $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ eş üçgenlerdir.

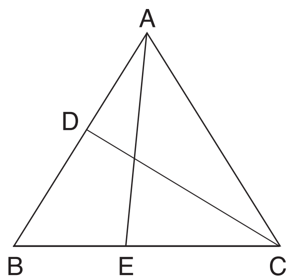
Bilgi Kutusu

Karşılıklı kenar uzunlukları eşit olan üçgenler eştir. Bu durum Kenar-Kenar-Kenar (K.K.K.) Eşliği olarak adlandırılır. Kenarlarının uzunlukları eşit olan üçgenlerde eş kenarların karşılarındaki açıların ölçüleri de eşittir.



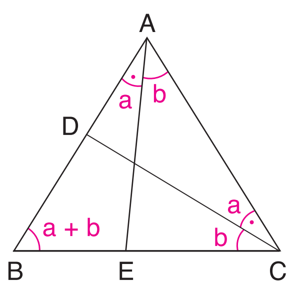
$|AB| = |DE|$, $|BC| = |EF|$ ve $|AC| = |DF|$ ise
$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ olur.

Örnek



ABC üçgeninde $D \in [AB]$, $E \in [BC]$ dır.
$|AB| = |AC|$, $|AD| = |BE|$ ve $|AE| = |CD|$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

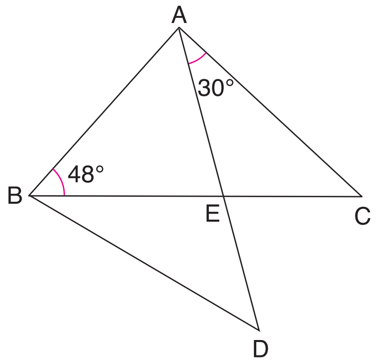


$|AB| = |AC|$, $|AD| = |BE|$ ve $|AE| = |CD|$ olduğundan K.K.K. eşlik kuralı gereğince $\widehat{ABE} \cong \widehat{CAD}$ olur.

O hâlde $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{ACD})$ ve $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{CAD})$ olur.

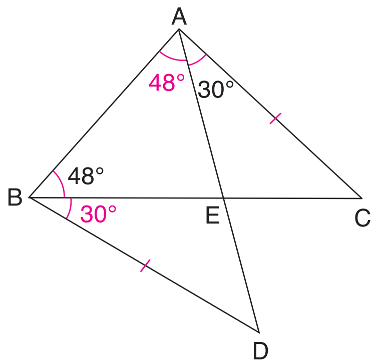
$\widehat{ABC}$ nde bütün iç açıların ölçüleri birbirine eşit olduğundan $\widehat{ABC}$ eşkenar üçgendir ve $m(\widehat{ABC}) = 60°$ dir.

Örnek



ABC ve ABD birer üçgen ve $[AD] \cap [BC] = \{E\}$ dir.
$m(\widehat{ABC}) = 48°$, $m(\widehat{DAC}) = 30°$, $|AD| = |BC|$ ve $|AC| = |BD|$ olduğuna göre $m(\widehat{ADB})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$|AC| = |BD|$, $|BC| = |AD|$ ve $|AB|$ ortak kenar olduğundan K.K.K. eşlik kuralı gereğince $\overset{\frown}{BAC} \cong \overset{\frown}{ABD}$ olur.

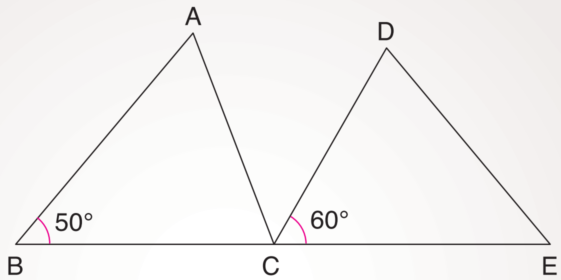
Eş üçgenlerde eş kenarların karşısındaki açıların ölçüleri de eşit olduğundan

$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ABC}) = 48°$ ve

$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ABD}) = 78°$ dir.

$\overset{\frown}{ABD}$ nde $48° + 78° + m(\widehat{ADB}) = 180° \Rightarrow m(\widehat{ADB}) = 54°$ bulunur.

Sıra Sizde



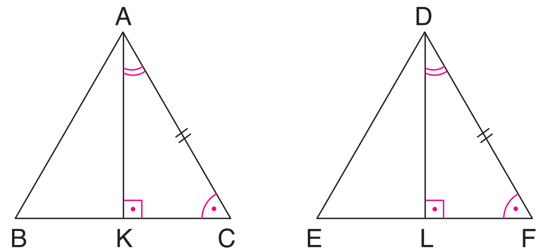
B, C, E doğrusal noktalar ve ABC ile DCE birer üçgendir.
$|AB| = |CE|$, $|AC| = |CD|$, $|BC| = |DE|$, $m(\widehat{DCE}) = 60°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 50°$ olduğuna göre $m(\widehat{CDE})$ kaç derecedir?

Örnek

Eş üçgenlerin karşılıklı yüksekliklerinin eş olup olmadığını gösterelim.

Çözüm

$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ olacak şekilde $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ ve bu üçgenlerin [AK] ve [DL] yüksekliklerini çizelim.



$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF} \Rightarrow m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DFE})$ ve $|AC| = |DF|$ dur.

$m(\widehat{AKC}) = m(\widehat{DLF}) = 90°$ olduğundan $m(\widehat{KAC}) = m(\widehat{LDF})$ dür.

O hâlde $\widehat{AKC} \cong \widehat{DLF}$ olur. Buradan $|AK| = |DL|$ dur.

Bilgi Kutusu

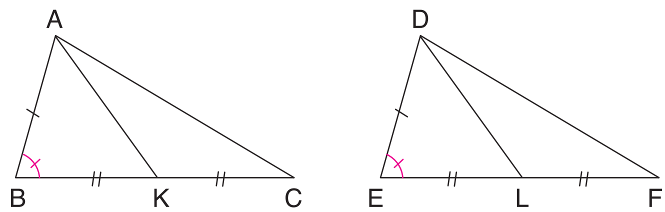
Eş üçgenlerin karşılıklı yükseklikleri de eştir.

Örnek

Eş üçgenlerin karşılıklı kenarortaylarının eş olup olmadığını gösterelim.

Çözüm

$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ olacak şekilde $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ ve bu üçgenlerin [AK] ve [DL] kenarortaylarını çizelim.



$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF} \Rightarrow m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF})$ ve $|AB| = |DE|$ dur.

$|BC| = |EF|$ ve [AK] ile [DL] kenarortay olduğundan $|BK| = |EL|$ dur.

O hâlde $\widehat{ABK} \cong \widehat{DEL}$ olur. Buradan $|AK| = |DL|$ dur.

Bilgi Kutusu

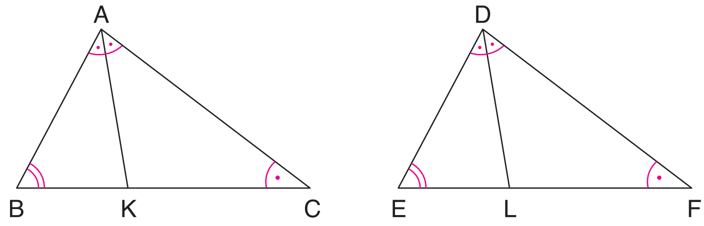
Eş üçgenlerin karşılıklı kenarortayları da eştir.

Örnek

Eş üçgenlerin karşılıklı açıortaylarının da eş olduğunu gösterelim.

Çözüm

$\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DEF}$ olacak şekilde $\overset{\frown}{ABC}$ ile $\overset{\frown}{DEF}$ ve bu üçgenlerin [AK] ve [DL] açıortaylarını çizelim.

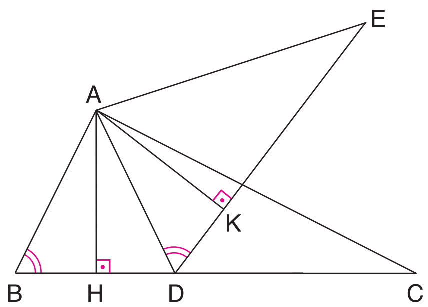


$\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DEF} \Rightarrow m(\overset{\frown}{ABC}) = m(\overset{\frown}{DEF})$, $|AB| = |DE|$ ve $m(\overset{\frown}{BAC}) = m(\overset{\frown}{EDF})$ dür.
[AK] ile [DL] açıortay olduğundan $m(\overset{\frown}{BAK}) = m(\overset{\frown}{EDL})$ olur.
O hâlde $\overset{\frown}{ABK} \cong \overset{\frown}{DEL}$ olur. Buradan $|AK| = |DL|$ dur.

Bilgi Kutusu

Eş üçgenlerin karşılıklı açıortayları da eştir.

Örnek



ABC ve ADE birer üçgen, $D \in [BC]$, $[AH] \perp [BC]$ ve $[AK] \perp [DE]$ tir.
$|AB| = |AD|$, $|BC| = |DE|$, $m(\overset{\frown}{ABC}) = m(\overset{\frown}{ADE})$, $|AK| = (x + 6)$ cm ve $|AH| = (2x - 3)$ cm olduğuna göre $|AK|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

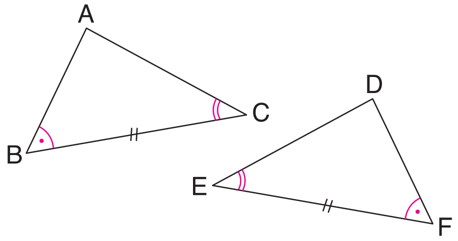
$|AB| = |AD|$, $|BC| = |DE|$ ve $m(\overset{\frown}{ABC}) = m(\overset{\frown}{ADE})$ olduğundan K.A.K. kuralı gereğince $\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{ADE}$ olur.

Buradan $|AH| = |AK| \Rightarrow x + 6 = 2x - 3 \Rightarrow x = 9$ cm ve
$|AK| = x + 6 = 9 + 6 = 15$ cm bulunur.

1. Aşağıdaki üçgenlerde eş olan açı ve kenarlar gösterilmiştir.

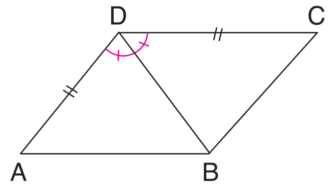
Bu üçgenler arasındaki eşliği ve eşlik kuralını altlarındaki noktalı yerlere yazınız.

a)



....

b)

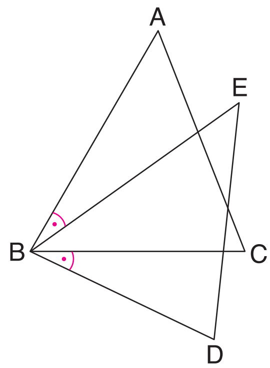


....

2. $\widehat{PRS} \cong \widehat{KLM}$ olduğuna göre aşağıda verilen ifadelerin yanlarındaki kutucuklara doğru olanlar için "D" yanlış olanlar için "Y" yazınız.

☐ $\lvert PR\rvert = \lvert KL\rvert$	☐ $\lvert RS\rvert = \lvert LM\rvert$	☐ $\widehat{SRP} \cong \widehat{LMK}$
☐ $m(\widehat{RSP}) = m(\widehat{LMK})$	☐ $m(\widehat{RPS}) = m(\widehat{LKM})$	☐ $\lvert PS\rvert = \lvert KL\rvert$

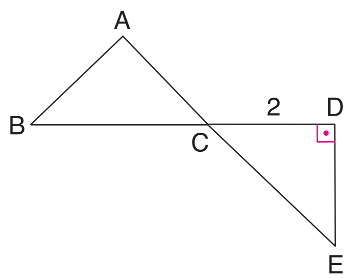
3.



ABC ve BDE üçgenlerinde $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{CBD})$, $|BD| = |BC|$, $|AB| = |BE|$ dur.

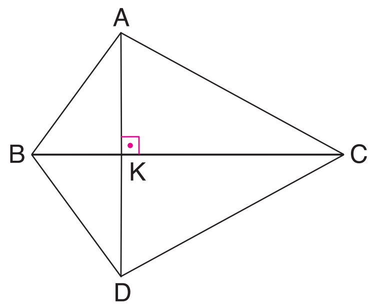
$|AC| = (3x + 1)$ cm ve ve $|ED| = (x + 4)$ cm olduğuna göre $|ED|$ kaç santimetredir?

4.



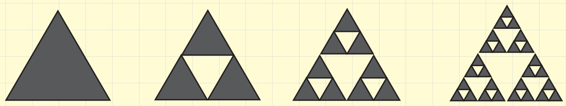
Şekilde ABC ve CDE üçgen, $[AE] \cap [BD] = \{C\}$, $[ED] \perp [DC]$, $|AB| = |AC| = |CE|$ ve $|CD| = 2$ cm olduğuna göre $|BD|$ kaç santimetredir?

5.



Şekilde $[AD] \perp [BC]$, $|AB| = |BD|$, $|AC| = |CD|$, $|AK| = (2x + 3)$ cm ve $|KD| = (4x - 4)$ cm olduğuna göre $|AD|$ kaç santimetredir?

9.4.2.2. İki Üçgenin Benzer Olması İçin Gereken Asgari Koşullar



Polonyalı matematikçi Vaclav Sierpinski (Vaklav Sierpinski) 1915 yılında Sierpinski Üçgeni denen bir fraktal tanıttı. Sierpinski Üçgeni her adımda, siyah renkli eşkenar üçgenlerden her birinin dört eşkenar üçgene ayrılıp ortadakinin atılmasıyla elde edilmiştir.

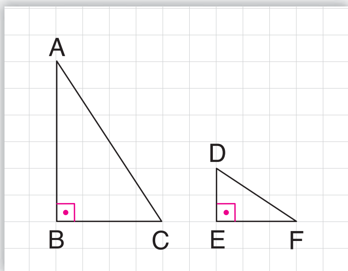
» Sierpinski üçgeninin yukarıdaki adımlarında benzer olan üçgenleri belirleyiniz.

Bilgi Kutusu

Karşılıklı kenar uzunlukları orantılı ve karşılıklı açıları eş olan üçgenler benzer üçgenlerdir. $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ benzer üçgenler ise $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ şeklinde gösterilir.

Benzer üçgenlerin karşılıklı kenarlarının uzunlukları oranına **benzerlik oranı** denir.

Örnek



Kareli zeminde verilen benzer üçgenler arasındaki benzerlik oranını bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABC}$ nde $|AB| = 6$ birim, $|BC| = 4$ birim,

$|AC| = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$ birimdir.

$\widehat{DEF}$ nde $|FE| = 3$ birim, $|ED| = 2$ birim, $|FD| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ birimdir.

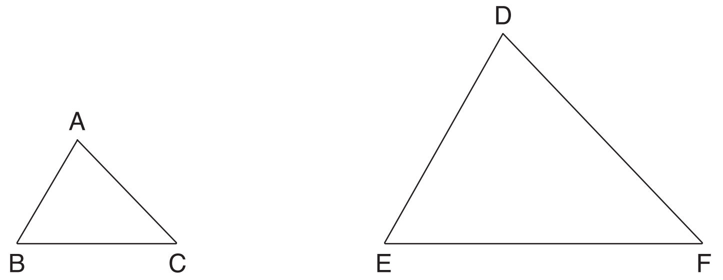
O hâlde $|AB| = 2|FE|$, $|BC| = 2|ED|$ ve $|AC| = 2|FD|$ dur.

$\widehat{ABC} \sim \widehat{FED}$ olup üçgenler arasındaki benzerlik oranı

$\frac{|AB|}{|FE|} = \frac{|BC|}{|ED|} = \frac{|AC|}{|FD|} = 2$ bulunur.

Kenar-Açı-Kenar (K.A.K.) Benzerlik Kuralı

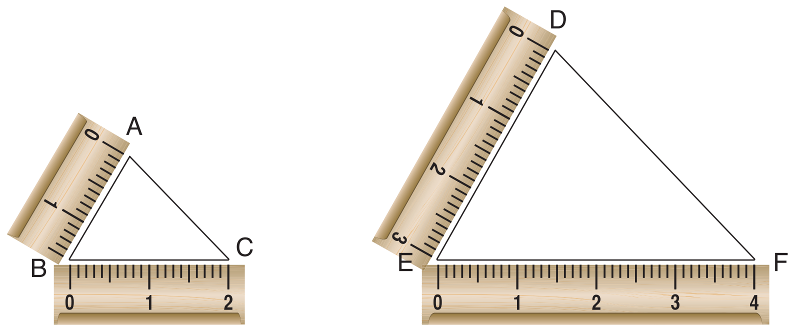
Örnek



$\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ nin benzer üçgenler olduğunu ölçümler yaparak gösterelim.

Çözüm

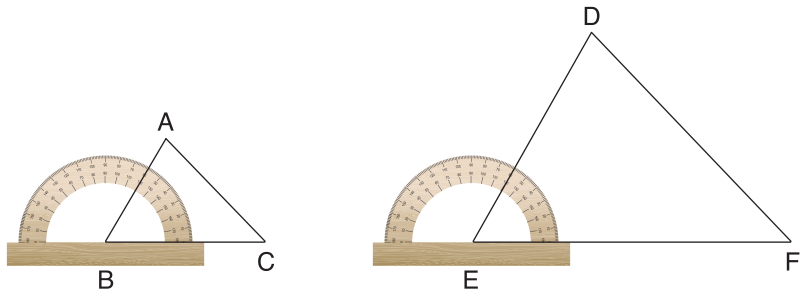
Verilen üçgenlerde ikişer kenarın uzunluklarını cetvel yardımıyla ölçelim.



$|AB| = 1,5$ cm, $|BC| = 2$ cm, $|DE| = 3$ cm, $|EF| = 4$ cm'dir.

Buradan $|DE| = 2.|AB|$ ve $|EF| = 2 \cdot |BC|$ olduğunu görürüz.

Açıölçer yardımıyla $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ nı ölçelim.



$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF}) = 60°$ olduğunu görürüz.

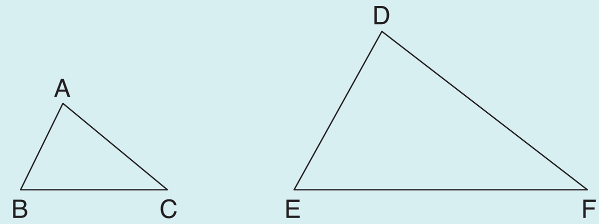
Cetvel yardımıyla $|AC|$ ve $|DF|$ nu ölçersek $|DF| = 2|AC|$ olduğunu görürüz.

O hâlde karşılıklı ikişer kenarının uzunlukları orantılı ve bu kenarlar arasındaki açılarının ölçüleri eşit olan $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ benzer üçgenlerdir.

Bilgi Kutusu

Karşılıklı iki kenarının uzunluğu orantılı ve bu iki kenarın oluşturduğu açıların ölçüleri eşit olan üçgenler benzerdir.

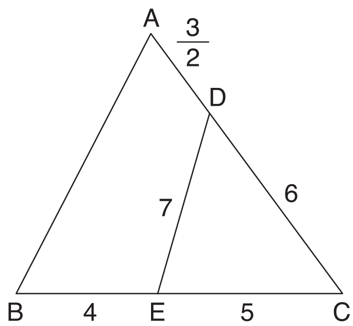
Bu durum Kenar-Açı-Kenar (K.A.K.) Benzerlik Kuralı olarak adlandırılır.



$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = k(k \in R)$ ve $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF})$ ise

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ dir.

Örnek



ABC üçgeninde D ∈ [AC] ve E ∈ [BC], $|AD| = \frac{3}{2}$ cm, $|DC| = 6$ cm, $|EC| = 5$ cm, $|BE| = 4$ cm ve $|DE| = 7$ cm olduğuna göre $|AB|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABC}$ ile $\widehat{EDC}$ nde $\widehat{ACB}$ ortak açıdır.

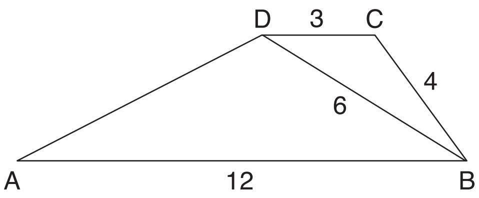
$$\frac{|BC|}{|DC|} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \text{ ve } \frac{|AC|}{|EC|} = \frac{\frac{15}{2}}{5} = \frac{3}{2} \text{ olduğundan}$$

$$\frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|AC|}{|EC|} = \frac{3}{2} \text{ olur.}$$

Karşılıklı olarak ikişer kenarının uzunlukları orantılı ve bir açısı ortak olduğundan K.A.K. kuralı gereğince $\widehat{ABC} \sim \widehat{EDC}$ dir.

Bu durumda $\frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|BC|}{|DC|} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{|AB|}{7} = \frac{3}{2} \Rightarrow |AB| = \frac{21}{2}$ cm olur.

Örnek



ABCD dörtgeninde [AB] // [DC] dır.
$|AB| = 12$ cm, $|DC| = 3$ cm, $|BC| = 4$ cm ve $|DB| = 6$ cm olduğuna göre $|AD|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

[AB] // [DC] olduğundan $m(\widehat{CDB}) = m(\widehat{DBA})$ dür.

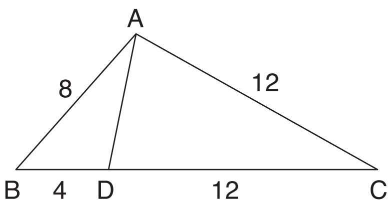
$\overset{\triangle}{ABD}$ ile $\overset{\triangle}{BDC}$ nde $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{12}{6} = 2$ ve $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{6}{3} = 2$ olduğundan

$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|BD|}{|DC|} = 2$ dir. K.A.K. kuralı gereğince $\overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{BDC}$ dir.

Bu durumda $\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AB|}{|BD|} \Rightarrow \frac{|AD|}{4} = 2$

$\Rightarrow |AD| = 8$ cm bulunur.

Örnek



ABC üçgeninde $D \in [BC]$,
$|AB| = 8$ cm, $|BD| = 4$ cm ve $|DC| = |AC| = 12$ cm olduğuna göre $|AD|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$\overset{\triangle}{ABD}$ ile $\overset{\triangle}{CBA}$ nde $\widehat{ABD}$ ortak açıdır.

$\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ ve $\frac{|BD|}{|BA|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ olduğundan

$\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|BD|}{|BA|} = \frac{1}{2}$ olur.

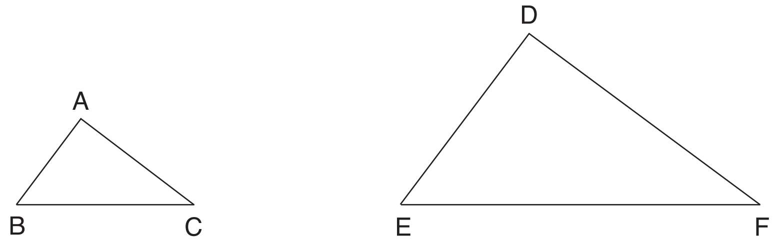
K.A.K. kuralı gereğince $\overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{CBA}$ dir.

Bu durumda $\frac{|AD|}{|CA|} = \frac{|AB|}{|CB|} \Rightarrow \frac{|AD|}{12} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |AD| = 6$ cm bulunur.

Kenar-Kenar-Kenar (K.K.K.) Benzerlik Kuralı

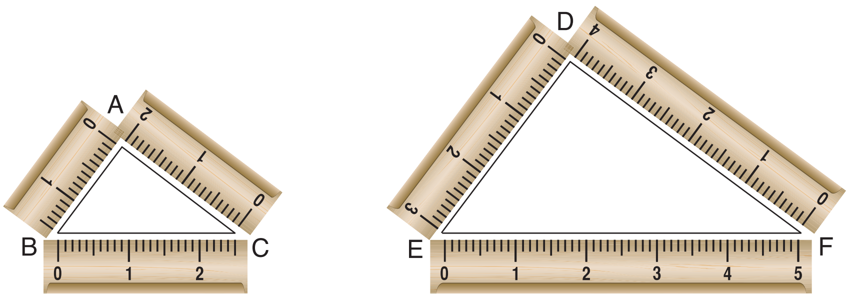
Örnek



$\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ nin benzer üçgenler olduğunu ölçümler yaparak bulalım.

Çözüm

Verilen üçgenlerin kenar uzunluklarını cetvel yardımıyla ölçelim.

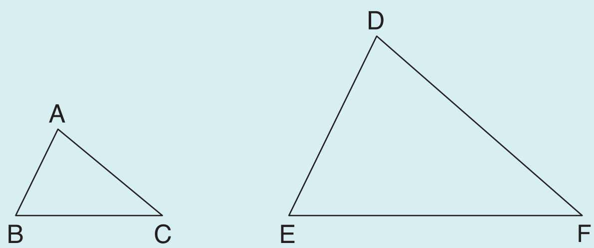


$|AB| = 1{,}5$ cm, $|BC| = 2{,}5$ cm, $|AC| = 2$ cm, $|DE| = 3$ cm, $|EF| = 5$ cm, $|DF| = 4$ cm'dir. Buradan $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{1}{2}$ olduğunu görürüz.

O hâlde karşılıklı olarak üç kenarının uzunluğu birbiriyle orantılı olan $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ benzer üçgenlerdir.

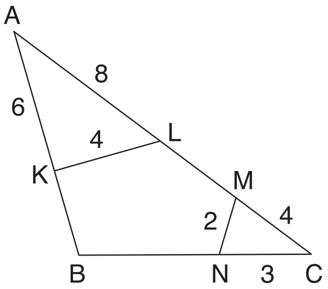
Bilgi Kutusu

Karşılıklı olarak üç kenarının uzunlukları orantılı olan üçgenler benzerdir. Bu durum Kenar-Kenar-Kenar (K.K.K.) Benzerlik Kuralı olarak adlandırılır.



$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = k$ ise $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ dır.

Örnek



ABC üçgeninde K ∈ [AB], N ∈ [BC], L ∈ [AC] ve M ∈ [AC] dır.

$|AK| = 6$ cm, $|AL| = 8$ cm,

$|KL| = |MC| = 4$ cm, $|MN| = 2$ cm ve $|NC| = 3$ cm olduğuna göre $|BN| - |BK|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

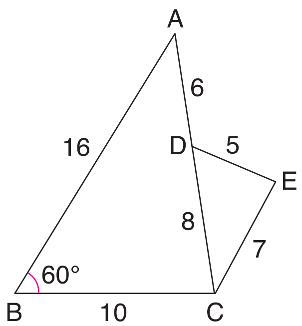
Çözüm

$\frac{|AK|}{|CN|} = \frac{6}{3} = 2$, $\frac{|KL|}{|NM|} = \frac{4}{2} = 2$ ve $\frac{|AL|}{|CM|} = \frac{8}{4} = 2$ olduğundan K.K.K.

kuralı gereğince $\widehat{AKL} \sim \widehat{CNM}$ dir.

O hâlde $m(\widehat{KAL}) = m(\widehat{NCM})$ olup $\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgen olur. Bu durumda $|BC| = |AB|$ olur. $|BN| + 3 = |BK| + 6 \Rightarrow |BN| - |BK| = 3$ cm bulunur.

Örnek



ABC ve DEC birer üçgen, $|AB| = 16$ cm, $|BC| = 10$ cm, $|AD| = 6$ cm, $|DC| = 8$ cm, $|DE| = 5$ cm, $|EC| = 7$ cm ve $m(\widehat{ABC}) = 60°$ olduğuna göre $m(\widehat{EDC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

$\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$,

$\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$,

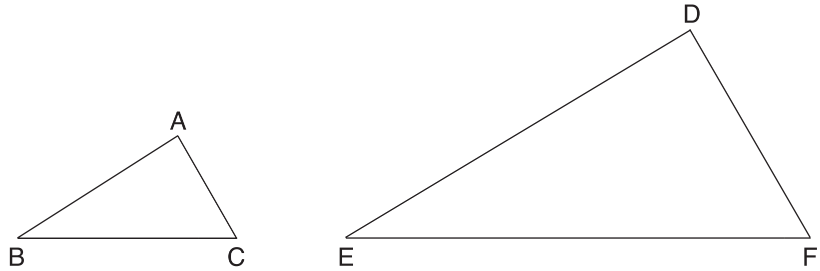
$\frac{|CE|}{|AC|} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$ olur.

$\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|CE|}{|AC|} = \frac{1}{2}$ olduğundan K.K.K. kuralı gereğince

$\widehat{CDE} \sim \widehat{ABC}$ dir. O hâlde $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{ABC}) = 60°$ olur.

Açı-Açı (A.A.) Benzerlik Kuralı

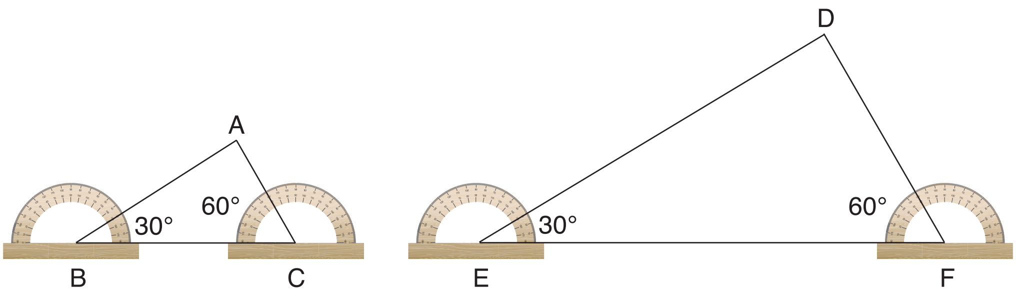
Örnek



$\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ nin benzer üçgenler olduğunu ölçümler yaparak bulalım.

Çözüm

Verilen üçgenlerde $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{DEF}$, $\widehat{DFE}$ nı açıölçer yardımıyla ölçelim.



$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF}) = 30°$, $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DFE}) = 60°$ olduğunu görürüz.

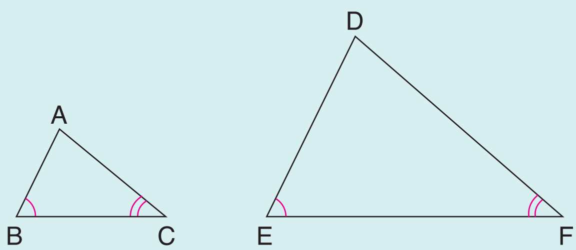
Cetvel yardımıyla $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ nin kenar uzunluklarını ölçersek

$\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{1}{2}$ olduğunu görürüz.

O hâlde karşılıklı olarak ikişer açısının ölçüsü eşit olan $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ benzerdir.

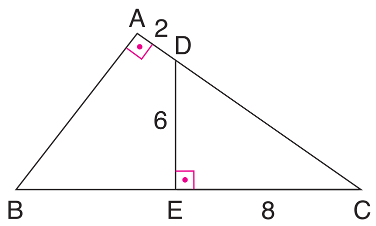
Bilgi Kutusu

Karşılıklı olarak ikişer açısının ölçüsü eşit olan üçgenler benzerdir. Bu durum Açı-Açı (A.A.) Benzerlik Kuralı olarak adlandırılır.



$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF})$ ve $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DFE})$ ise $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ dir.

Örnek



ABC dik üçgeninde
$[BA] \perp [AC]$, $[DE] \perp [BC]$,
$|AD| = 2$ cm, $|EC| = 8$ cm ve
$|DE| = 6$ cm olduğuna göre $|AB|$
nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$\widehat{DEC}$ nde $|DC|^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow |DC| = 10$ cm olur.

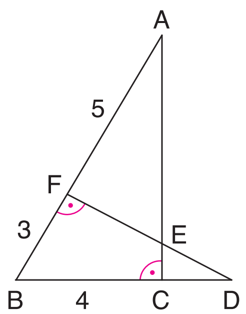
$\widehat{ABC}$ ile $\widehat{EDC}$ nde $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DEC}) = 90°$ ve $\widehat{ACB}$ ortak açı olduğundan A.A. kuralı gereğince $\widehat{ABC} \sim \widehat{EDC}$ dir.

Bu durumda $\dfrac{|AB|}{|ED|} = \dfrac{|AC|}{|EC|} \Rightarrow \dfrac{|AB|}{6} = \dfrac{12}{8}$

$\Rightarrow 8 \cdot |AB| = 6 \cdot 12$

$\Rightarrow |AB| = 9$ cm bulunur.

Örnek



ABC üçgeninde $F \in [AB]$, $[DF] \cap [AC] = \{E\}$, $m(\widehat{BFD}) = m(\widehat{BCA})$, $|AF| = 5$ cm, $|FB| = 3$ cm ve $|BC| = 4$ cm olduğuna göre $|CD|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DBF}$ nde $m(\widehat{BFD}) = m(\widehat{BCA})$ ve $\widehat{ABC}$ ortak açı olduğundan A.A. kuralı gereğince $\widehat{ABC} \sim \widehat{DBF}$ dir.

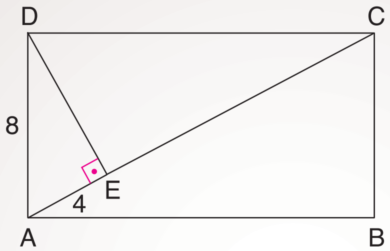
Bu durumda $\dfrac{|AB|}{|DB|} = \dfrac{|BC|}{|BF|} \Rightarrow \dfrac{8}{4 + |CD|} = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow 24 = 16 + 4|CD|$

$\Rightarrow 8 = 4|CD|$

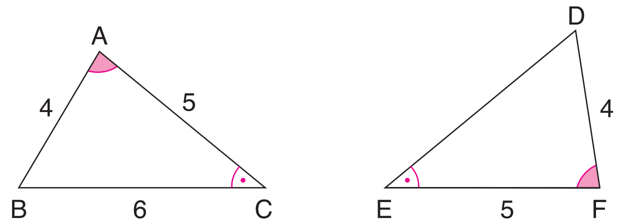
$\Rightarrow |CD| = 2$ cm bulunur.

Sıra Sizde



ABCD dikdörtgeninde [AC] köşegen, [DE] ⊥ [AC] dır. |AD| = 8 cm ve |AE| = 4 cm olduğuna göre |EC| kaç santimetredir?

Örnek



$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ nde |AB| = |DF| = 4 cm, |AC| = |EF| = 5 cm, |BC| = 6 cm, $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DFE})$ ve $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DEF})$ olduğuna göre bu üçgenler için aşağıdakilerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $\widehat{ABC} \sim \widehat{FDE}$ **b)** $\widehat{ABC} \cong \widehat{FDE}$

Çözüm

a) $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{FDE}$ nde $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DFE})$, $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DEF})$ olduğundan A.A. kuralı gereğince $\widehat{ABC} \sim \widehat{FDE}$ dir.

Buradan $\frac{|AB|}{|FD|} = \frac{|AC|}{|FE|} = \frac{|BC|}{|DE|} \Rightarrow \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{|DE|} \Rightarrow |DE| = 6$ cm

bulunur. $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{FDE}$ nin benzerlik oranı 1 dir.

b) $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{FDE}$ üçgenlerinin karşılıklı olarak bütün kenarları eş olduğundan K.K.K. eşlik kuralı gereğince $\widehat{ABC} \cong \widehat{FDE}$ dir.

Bilgi Kutusu

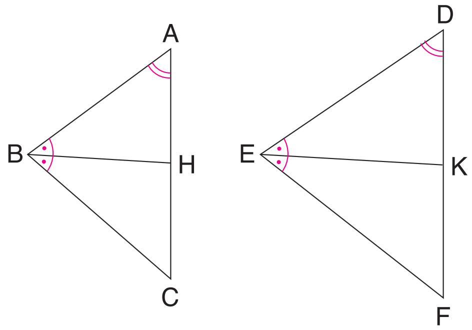
- Benzerlik oranı 1 olan benzer üçgenler aynı zamanda eş üçgenlerdir.
- Eş üçgenler aynı zamanda benzerdir.

Örnek

Benzer üçgenlerin karşılıklı açılarına ait açıortaylarının uzunluklarını karşılaştıralım.

Çözüm

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ olacak şekilde ABC ve DEF üçgenlerini çizelim.



$\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = k$ olsun.

$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ na ait açıortayları çizdiğimizde $m(\widehat{ABH}) = m(\widehat{DEK})$ olur.

$m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{EDK})$ olduğundan A.A. kuralı gereğince $\widehat{ABH} \sim \widehat{DEK}$ dir.

Benzer üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları orantılı olduğundan

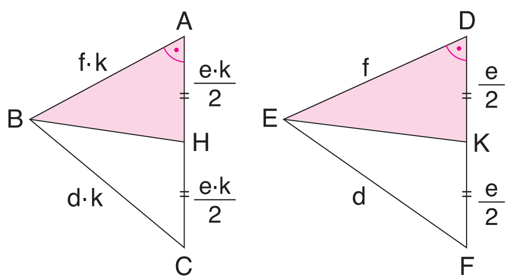
$\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AH|}{|DK|} = \dfrac{|BH|}{|EK|}$ dur. $\dfrac{|AB|}{|DE|} = k$ olduğu için $\dfrac{|BH|}{|EK|} = k$ bulunur.

Örnek

Benzer üçgenlerin karşılıklı kenarlarına ait kenarortaylarının uzunluklarını karşılaştıralım.

Çözüm

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ olacak şekilde ABC ve DEF üçgenleri çizelim.



$\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = k$ olsun.

AC ve DF kenarlarına ait kenarortayları çizdiğimizce [AH] ve [DK] nın uzunluklarının orantılı olduğu görülür.

$m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{EDK})$ olduğundan K.A.K. kuralı gereğince $\widehat{ABH} \sim \widehat{DEK}$ ve

$\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AH|}{|DK|} = \dfrac{|BH|}{|EK|}$ dur. $\dfrac{|AB|}{|DE|} = k$ olduğundan $\dfrac{|BH|}{|EK|} = k$ bulunur.

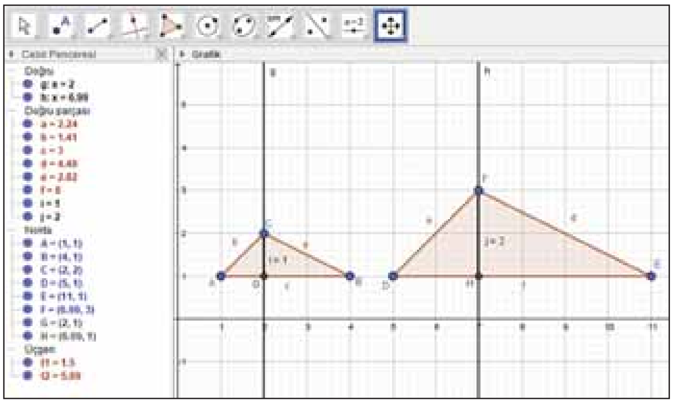
Örnek

Benzer üçgenlerin karşılıklı yüksekliklerinin de aynı benzerlik oranına sahip olduğunu GeoGebra programı yardımıyla gösterelim.

Çözüm

Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayarak grafik penceresinde benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ olan ABC ve DEF üçgenlerini oluşturalım. Daha sonra "Araç Çubuğu" bölümünden "Dik Doğru" kısmına tıklayalım. ABC üçgeni üzerinde C köşesine ve karşısındaki kenara, DEF üçgeni üzerinde F köşesine ve karşısındaki kenara tıklayarak yükseklikleri oluşturalım.

Ardından "Araç Çubuğu" bölümünden "Nokta" kısmına tıklayarak yüksekliklerin kenarları kestiği G ve H noktalarını belirleyelim. Daha sonra "Araç Çubuğu" bölümünden "Doğru Parçası" kısmına tıklayarak CG ve FH doğru parçalarını oluşturalım. "Araç Çubuğu" bölümünden "Uzaklık veya Uzunluk" kısmına tıklayarak CG ve FH doğru parçalarının uzunluklarını belirleyelim.



Sonuç olarak benzer üçgenlerde yüksekliklerin aynı benzerlik oranına sahip olduğu görülmektedir.

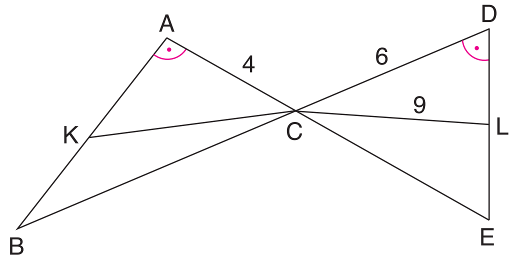
Sıra Sizde

Siz de benzer üçgenlerin açıortaylarının ve kenarortaylarının da aynı benzerlik oranına sahip olduğunu GeoGebra programı yardımıyla gösterip sununuz.

Bilgi Kutusu

- Benzer iki üçgenin orantılı kenarlarına ait açıortayların uzunlukları oranı benzerlik oranına eşittir.
- Benzer iki üçgenin orantılı kenarlarına ait kenarortayların uzunlukları oranı benzerlik oranına eşittir.
- Benzer iki üçgenin orantılı kenarlarına ait yüksekliklerin uzunlukları oranı benzerlik oranına eşittir.

Örnek



[AE] ∩ [BD] = {C}, [CK] ve [CL] sırasıyla [AB] ve [DE] kenarlarına ait kenarortaylardır.

$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CDE})$, $|AC| = 4$ cm, $|CD| = 6$ cm ve $|CL| = 9$ cm olduğuna göre $|CK|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$\widehat{ACB}$ ile $\widehat{DCE}$ ters açılar olup $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DCE})$ olur.

$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CDE})$ olduğundan A.A. kuralı gereğince $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEC}$ dir.

Buradan benzerlik oranı $\dfrac{|AC|}{|DC|} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ olur.

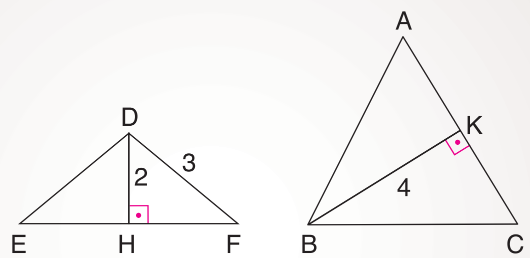
Benzer üçgenlerin kenarortaylarının uzunluklarının oranı da benzerlik oranına eşit olduğundan

$$\frac{|CK|}{|CL|} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{|CK|}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3|CK| = 18$$

$$\Rightarrow |CK| = 6 \text{ cm bulunur.}$$

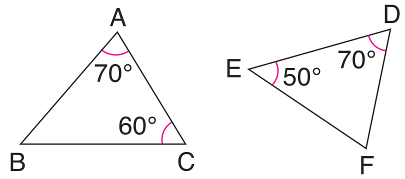
Sıra Sizde



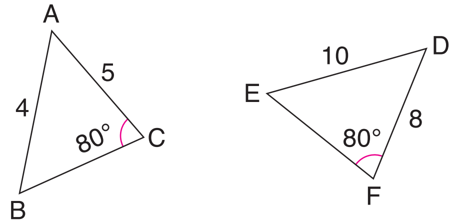
Yukarıdaki üçgenler arasında $\widehat{DEF} \sim \widehat{BAC}$ bağıntısı vardır.

$[DH] \perp [EF]$, $[BK] \perp [AC]$, $|DH| = 2$ cm, $|BK| = 4$ cm ve $|DF| = 3$ cm olduğuna göre $|BC|$ kaç santimetredir?

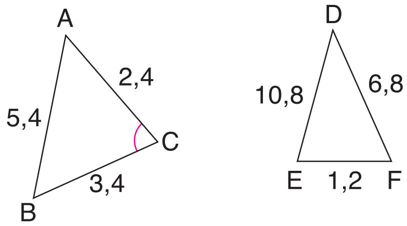
1. Aşağıda bazı açılarının ölçüleri veya kenar uzunlukları verilen üçgen çiftlerinin benzer olup olmadığını belirtiniz, benzer olan üçgenler arasındaki benzerlik eşlemesini ve kuralını noktalı yerlere yazınız.



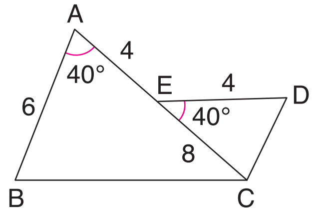
....



....

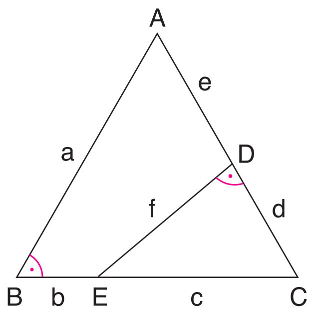


....



....

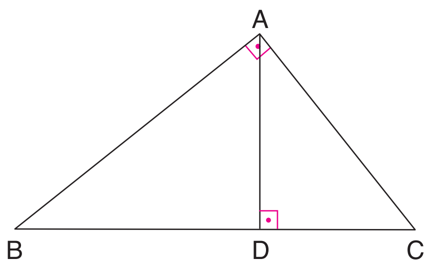
2.



Şekilde $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{EDC})$ olduğuna göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.

◯ $\frac{c}{e+d} = \frac{d}{b+c}$ ◯ $\frac{f}{a} = \frac{d}{b+c}$ ◯ $\frac{a}{f} = \frac{e+d}{d}$ ◯ $\frac{c}{b} = \frac{d}{e}$

3.

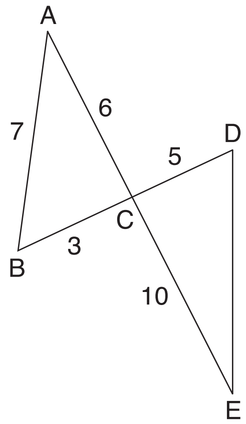


ABC üçgeninde [BA] ⊥ [AC] ve [AD] ⊥ [BC] dır.

Buna göre aşağıda verilen benzerliklerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.

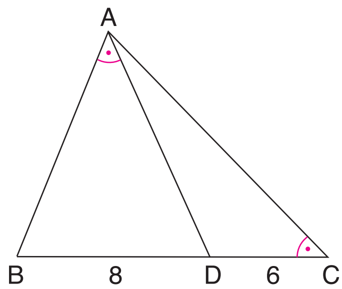
◯ $\widehat{ABD} \sim \widehat{CAD}$ ◯ $\widehat{BCA} \sim \widehat{BAD}$ ◯ $\widehat{CAB} \sim \widehat{CDA}$ ◯ $\widehat{ADC} \sim \widehat{BCA}$

4.



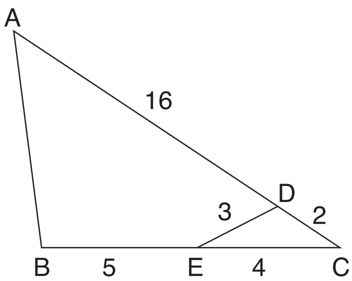
Şekilde $[AE] \cap [BD] = \{C\}$, $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 3$ cm, $|AC| = 6$ cm, $|CD| = 5$ cm ve $|CE| = 10$ cm olduğuna göre $|DE|$ kaç santimetredir?

5.



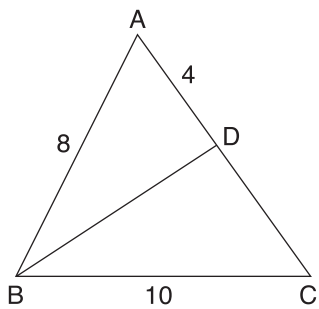
ABC üçgeninde $D \in [BC]$, $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ACB})$, $|BD| = 8$ cm ve $|DC| = 6$ cm olduğuna göre $|AB|$ kaç santimetredir?

6.



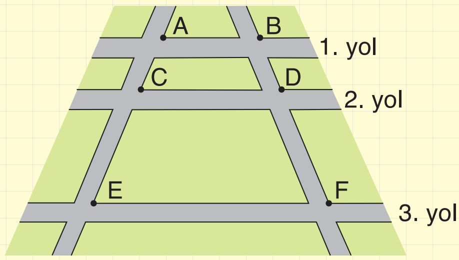
ABC üçgeninde $D \in [AC]$, $E \in [BC]$, $|AD| = 16$ cm, $|DC| = 2$ cm, $|BE| = 5$ cm, $|EC| = 4$ cm ve $|DE| = 3$ cm olduğuna göre $|AB|$ kaç santimetredir?

7.



ABC üçgeninde $D \in [AC]$, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADB})$, $|AB| = 8$ cm, $|AD| = 4$ cm, $|BC| = 10$ cm olduğuna göre $|BD| + |DC|$ kaç santimetredir?

9.4.2.3. Üçgenin Bir Kenarına Paralel ve Diğer İki Kenarını Kesecek Şekilde Çizilen Doğrunun Ayırdığı Doğru Parçaları Arasındaki İlişki

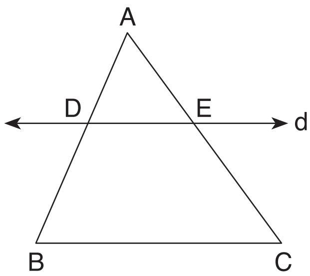


Şekildeki 1, 2 ve 3. yollar birbirine paraleldir.

- A noktası ile C noktası arası 100 metredir.
- C noktası ile E noktası arası 200 metredir.
- A noktası ile B noktası arası 300 metredir.
- C noktası ile D noktası arası 400 metredir.

» A noktasından hareket eden bir araç C ve E noktalarından geçerek F noktasına geldiğinde kaç metre yol almış olur?

Örnek



Şekildeki d doğrusu ABC üçgeninin AB ve AC kenarlarını sırasıyla D ve E noktalarında kesiyor.

d // [BC] olduğuna göre $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

d // [BC] olduğundan $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ABC})$ ve $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{ACB})$ olur.

Bu durumda A.A. kuralı gereğince $\widehat{ADE} \sim \widehat{ABC}$ dir.

$$\widehat{ADE} \sim \widehat{ABC} \Rightarrow \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|}$$

$$\Rightarrow \frac{|AD|}{|AD| + |DB|} = \frac{|AE|}{|AE| + |EC|}$$

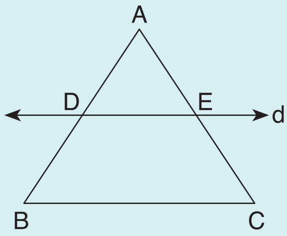
$$\Rightarrow \frac{|AD| + |DB|}{|AD|} = \frac{|AE| + |EC|}{|AE|}$$

$$\Rightarrow \frac{|AD|}{|AD|} + \frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|AE|}{|AE|} + \frac{|EC|}{|AE|}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{|DB|}{|AD|} = 1 + \frac{|EC|}{|AE|} \Rightarrow \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|} \text{ dir.}$$

Bilgi Kutusu

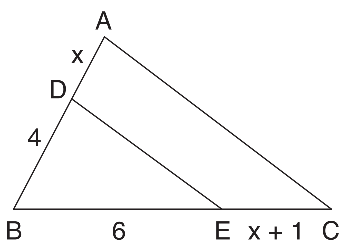
Bir üçgenin bir kenarına paralel olan ve üçgenin diğer kenarlarını farklı noktalarda kesen bir doğru, kestiği kenarları orantılı olarak böler. Buna **Temel Orantı Teoremi** denir.



Temel Orantı Teoreminin karşıtı da doğrudur. Yani bir doğru, bir üçgenin iki kenarını kestiğinde kestiği kenarlar üzerinde orantılı doğru parçaları ayırıyorsa bu doğru üçüncü kenara paraleldir.

d // [BC] $\Leftrightarrow \dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{|AE|}{|EC|}$ tir.

Örnek



ABC üçgeninde [DE] // [AC] dir.

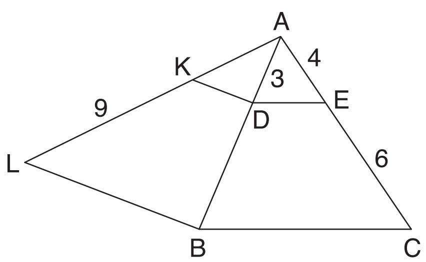
|BD| = 4 cm, |BE| = 6 cm,
|DA| = x cm ve |EC| = (x + 1) cm
olduğuna göre |EC| nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$[DE] \,//\, [AC] \Rightarrow \dfrac{|BD|}{|DA|} = \dfrac{|BE|}{|EC|} \Rightarrow \dfrac{4}{x} = \dfrac{6}{x+1} \Rightarrow x = 2$ bulunur.

O hâlde |EC| = x + 1 = 3 cm olur.

Örnek



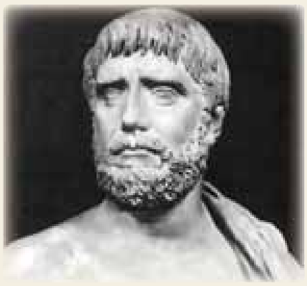
[DE] // [BC] ve [KD] // [LB] dır.

|AE| = 4 cm, |EC| = 6 cm,
|AD| = 3 cm ve |KL| = 9 cm
olduğuna göre |AK| nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$[DE] \,//\, [BC] \Rightarrow \dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{|AE|}{|EC|} \Rightarrow \dfrac{3}{|DB|} = \dfrac{4}{6} \Rightarrow |DB| = \dfrac{9}{2}$ cm olur.

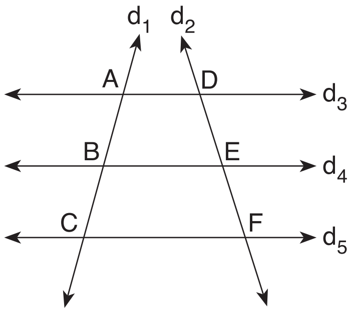
$[KD] \,//\, [LB] \Rightarrow \dfrac{|AK|}{|KL|} = \dfrac{|AD|}{|DB|} \Rightarrow \dfrac{|AK|}{9} = \dfrac{3}{\frac{9}{2}} \Rightarrow |AK| = 6$ cm olur.



Thales
(Tales)
(MÖ 624-MÖ 546)

Felsefenin ve bilimin öncüsü kabul edilen Thales Yunanlı matematikçi ve filozoftur. Thales'in doğru geometrisini oluşturduğu ve soyut geometrinin babası olduğu iddia edilir. Mısır'da geometrinin temelini öğrendiği sanılır. Mısır'da iken piramitlerin yüksekliğini hesaplamanın yolunu keşfetmiştir. Üçgenleri kullanarak çeşitli hesaplamalar yapmıştır. Bir dairenin içine üçgen çizme probleminin çözümü, cisimlerin gölgeleri yardımıyla yüksekliğinin hesabı, ters açıların eşitliği, ikizkenar bir üçgenin taban açılarının eşitliği, üçgenlerde kenarlar ile ilgili bağıntılarla ilgili çalışmaları ona matematiğin kurucusu vasfını kazandırmıştır.

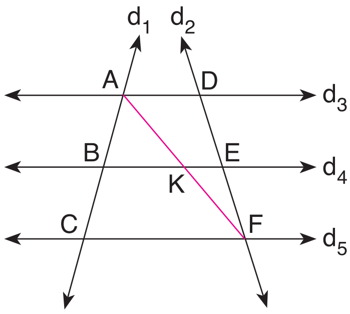
Örnek



d_1 ve d_2 doğruları, birbirine paralel olan d_3, d_4 ve d_5 doğrularını kesmektedir.

$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm



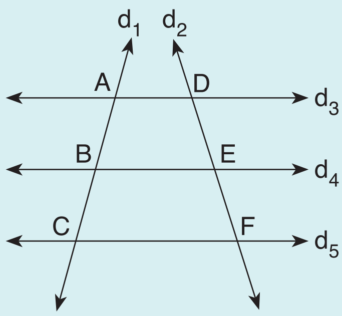
A ve F noktalarını birleştirerek $\overset{\frown}{ACF}$ ile $\overset{\frown}{ADF}$ elde edelim. [AF] nın [BE] nı kestiği noktaya K diyelim.

$\overset{\frown}{ACF}$ nde Temel Orantı Teoreminden $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AK|}{|KF|}$,

$\overset{\frown}{ADF}$ nde Temel Orantı Teoreminden $\frac{|AK|}{|KF|} = \frac{|DE|}{|EF|}$,

buradan $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ olduğu görülür.

Bilgi Kutusu

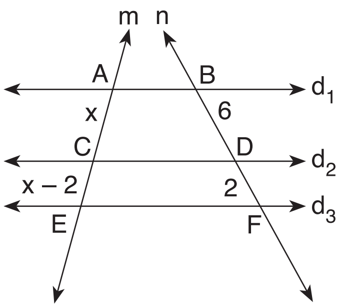


Birbirine paralel en az üç doğru, bunları kesen iki doğru üzerinde orantılı doğru parçaları oluşturur.

Buna **1. Thales Teoremi** denir.

$d_3 \,//\, d_4 \,//\, d_5 \Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ olur.

Örnek



Şekilde m ve n doğruları, birbirine paralel olan d_1, d_2 ve d_3 doğrularını kesmektedir.

$|AC| = x$ cm, $|CE| = (x - 2)$ cm, $|BD| = 6$ cm ve $|DF| = 2$ cm olduğuna göre $|AC| + |CE|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

1. Thales Teoreminden

$$\frac{|AC|}{|CE|} = \frac{|BD|}{|DF|} \Rightarrow \frac{x}{x-2} = \frac{6}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x = 6 \cdot (x - 2)$$

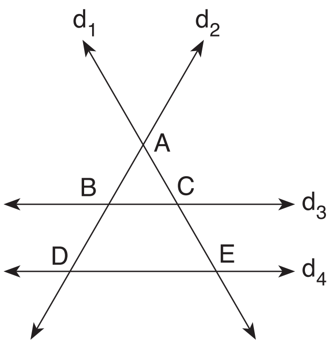
$$\Rightarrow 2x = 6x - 12$$

$$\Rightarrow 4x = 12$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ cm bulunur.}$$

Buradan $|AC| + |CE| = x + x - 2 = 2x - 2 = 2 \cdot 3 - 2 = 4$ cm bulunur.

Örnek



Şekilde birbirine paralel d_3 ve d_4 doğruları, A noktasında kesişen d_1 ve d_2 doğrularını kesmektedir.

$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|}$ olduğunu gösterelim.

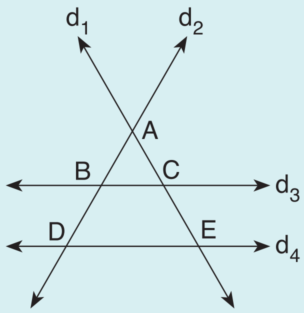
Çözüm

$d_3 \parallel d_4$ olduğundan $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADE})$ ve $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{AED})$ olur.

O hâlde A.A. kuralı gereğince $\widehat{ABC} \sim \widehat{ADE}$ dir.

Buradan $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|}$ olur.

Bilgi Kutusu

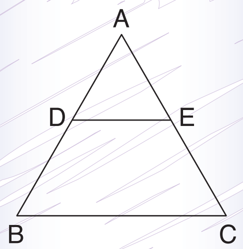


Kesişen iki doğru paralel iki doğru tarafından kesildiğinde oluşan üçgenlerin karşılıklı kenarlarının uzunlukları orantılıdır.

Buna **2. Thales Teoremi** denir.

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|} \text{ olur.}$$

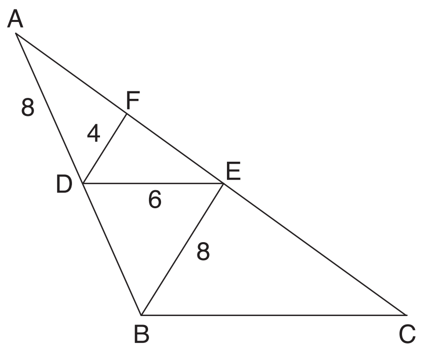
!



[DE] // [BC], |AD| = |DB| ve |AE| = |EC| ise [DE], $\widehat{ABC}$ nin orta tabanıdır.

$|DE| = \frac{|BC|}{2}$ olur.

Örnek



ABC üçgeninde [DE] // [BC] ve [DF] // [BE] dir.

|AD| = |BE| = 8 cm, |DF| = 4 cm ve |DE| = 6 cm olduğuna göre |BC| nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

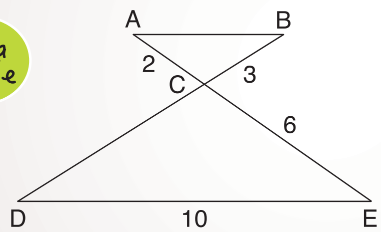
2. Thales Teoreminden

$$\widehat{ADF} \sim \widehat{ABE} \Rightarrow \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|BE|} \Rightarrow \frac{8}{|AB|} = \frac{4}{8} \Rightarrow |AB| = 16 \text{ cm olur.}$$

2. Thales Teoreminden

$$\widehat{ADE} \sim \widehat{ABC} \Rightarrow \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|} \Rightarrow \frac{8}{16} = \frac{6}{|BC|} \Rightarrow |BC| = 12 \text{ cm olur.}$$

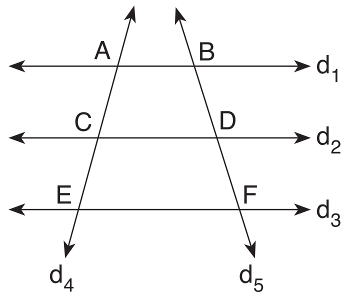
Sıra Sizde



Şekilde [AB] // [DE] ve [AE] ∩ [BD] = {C} dir.

|AC| = 2 cm, |CB| = 3 cm, |CE| = 6 cm ve |DE| = 10 cm olduğuna göre |AB| ve |DC| kaç santimetredir?

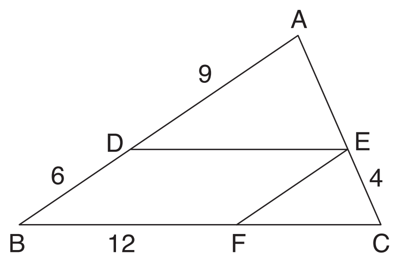
1.



d_4 ve d_5 doğruları birbirine paralel olan d_1, d_2, d_3 doğrularını kesmektedir.

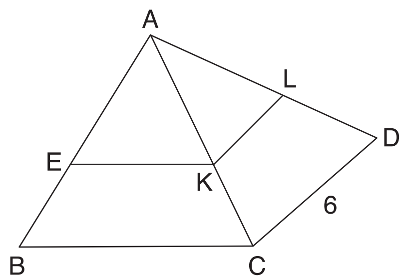
$3|AC| = 4|BD|$ ve $|DF| = 6$ cm olduğuna göre $|CE|$ kaç santimetredir?

2.



ABC üçgeninde [AB] // [EF], [DE] // [BC], $|AD| = 9$ cm, $|DB| = 6$ cm, $|EC| = 4$ cm ve $|BF| = 12$ cm olduğuna göre $|FC| + |AE|$ kaç santimetredir?

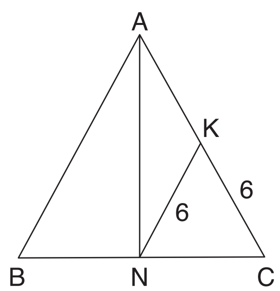
3.



$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{ACD}$ nde [EK] // [BC], [KL] // [CD] dır.

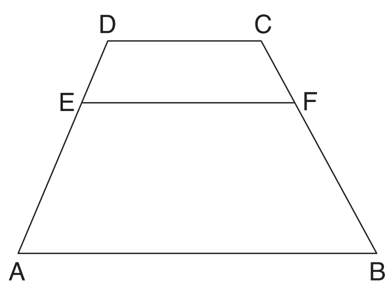
$2|AB| = 3|AE|$ ve $|CD| = 6$ cm olduğuna göre $|KL|$ kaç santimetredir?

4.



$\widehat{ABC}$ üçgeninde $m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{NAC})$, [NK] // [AB], $|KC| = |KN| = 6$ cm olduğuna göre $|AB|$ kaç santimetredir?

5.



ABCD dörtgeninde [AB] // [EF] // [DC], $|BC| = 3|CF|$, $|DC| = 10$ cm ve $|AB| = 16$ cm olduğuna göre $|EF|$ kaç santimetredir?

9.4.2.4. Üçgenlerin Benzerliği ile İlgili Problemler

Thales'in bir piramidin yüksekliğini nasıl ölçtüğüne dair farklı söylentiler vardır. Aristoteles'in (Aristotilis) öğrencisi olan Hieronymus (Hayranimus) "Thales" kendi gölgesinin boyuna eşit olduğu anda, piramidin gölgesini ölçerek yüksekliğini bulmuştur." demiştir. Thales bir geminin kıyıdan uzaklığını ölçerken de iki dik üçgenin kenarları arasındaki orantıdan yararlanmıştır.

Matematik dersinde bu bilgileri öğrenen Altay, Galata Kulesi'nin yüksekliğini ölçmek istiyor. Bunun için kuleden 11,5 metre uzağa yere düz bir ayna bırakıp doğrusal olarak 0,3 metre daha ilerlediğinde kulenin uç noktasını aynada görüyor. Boyu 1,80 m olan Altay aynaya gelen ışığın aynadan aynı açı ile yansıdığını biliyor.

» Üçgenlerin benzerliği ile ilgili kuralları kullanarak hesap yapan Altay, Galata Kulesi'nin yüksekliğini yaklaşık kaç metre bulmuştur?

! Gerçek yaşamda uzunluklarını farklı nedenlerden dolayı ölçemediğimiz nesnelerin uzunluklarını ölçmede üçgenlerin benzerliğinden yararlanırız.

Örnek

Güneşli bir günde belli bir anda bir ağacın yüksekliğini ölçmek için ağacın yanında 1 metre boyunda bir çubuk yere dik olarak tutuluyor. Bu çubuğun gölgesi 0,68 m olarak ölçüldüğü anda ağacın gölgesinin boyu 3,4 m olduğuna göre ağacın yüksekliğinin kaç metre olduğunu bulalım.

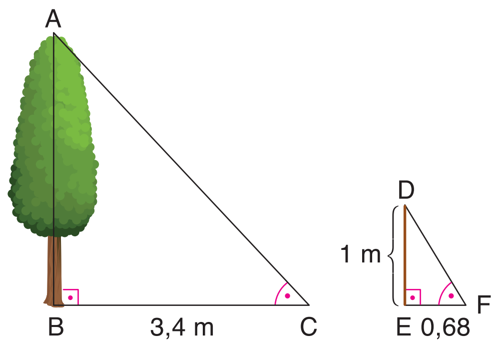
Çözüm

Problemde verilenleri yandaki gibi modelleyebiliriz.

$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DFE})$ ve

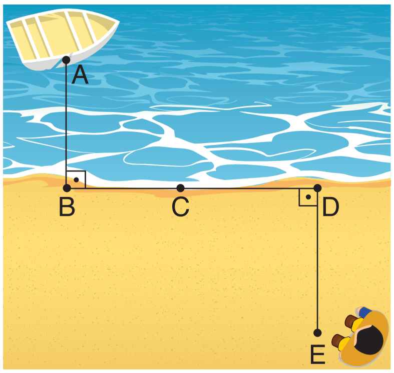
$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF}) = 90°$

olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ dir.



Buradan $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} \Rightarrow \frac{|AB|}{1} = \frac{3,4}{0,68} \Rightarrow |AB| = 5$ m bulunur.

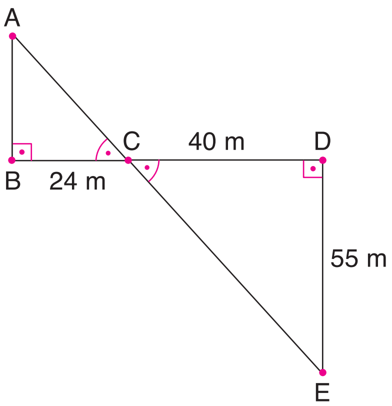
Örnek



Faruk denizde A noktasında sabit duran bir kayığın kıyıdan uzaklığını yaklaşık olarak hesaplamak istiyor. Bunun için şekildeki gibi B noktasından kıyı boyunca doğrusal olarak 24 m ilerliyor ve C noktasına bir çubuk dikip 40 m daha yürüyerek D noktasına geliyor. Sonra kıyıya dik şekilde ilerlemeye devam ediyor. E noktasına geldiğinde kayık ve çubuğu aynı hizada görüyor.

Faruk kıyıya dik şekilde 55 m yürüdüğüne göre kayığın kıyıdan uzaklığını bulalım.

Çözüm



Verilenleri yandaki gibi modellersek $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{EDC}$ olduğunu görürüz. Buradan

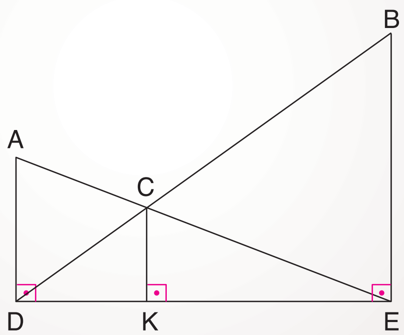
$$\frac{|AB|}{55} = \frac{24}{40} \Rightarrow 5|AB| = 3 \cdot 55$$

$$\Rightarrow |AB| = 3 \cdot 11$$

$$\Rightarrow |AB| = 33 \text{ m olur.}$$

Kayık, kıyıdan 33 m uzaklıktadır.

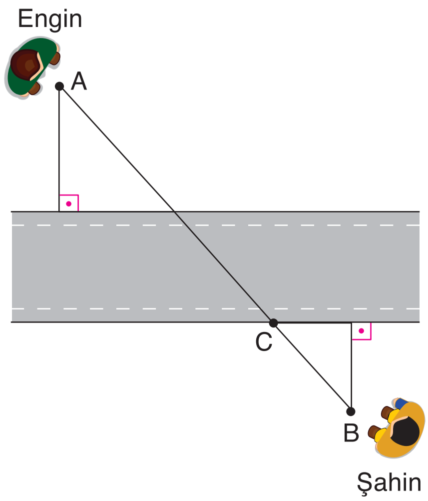
Sıra Sizde



A noktasından E ye, B noktasından D ye doğrusal olarak hareket eden iki kişi C noktasında karşılaşıyor.

$|AD| = 60$ m ve $|BE| = 120$ m olduğuna göre $|CK|$ kaç metredir?

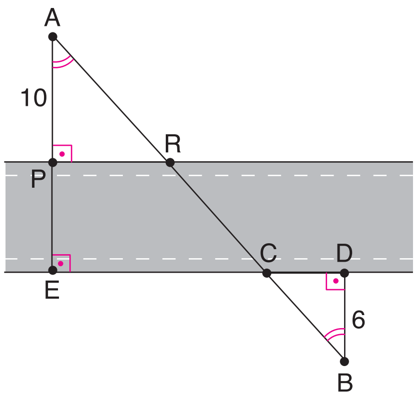
Örnek



Yol kenarından 10 m uzaklıktaki A noktasında bulunan Engin ile yolun diğer kenarının 6 m uzağındaki B noktasında bulunan Şahin birbirlerine doğru şekildeki gibi doğrusal bir biçimde hareket ederek C noktasında karşılaşıyorlar.

$3 \cdot |BC| = |AC|$ olduğuna göre yolun genişliğinin kaç metre olduğunu bulalım.

Çözüm



$3 \cdot |BC| = |AC| \Rightarrow |BC| = k$ iken $|AC| = 3k$ olur.

$m(\widehat{PAR}) = m(\widehat{CBD})$ ve

$m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{BDC}) = 90°$

olduğundan A.A. kuralı gereğince $\widehat{AEC} \sim \widehat{BDC}$ dir.

Buradan $\dfrac{|AE|}{|BD|} = \dfrac{|AC|}{|BC|} \Rightarrow \dfrac{10 + |PE|}{6} = \dfrac{3k}{k}$

$\Rightarrow 10 + |PE| = 18$

$\Rightarrow |PE| = 8$ m bulunur.

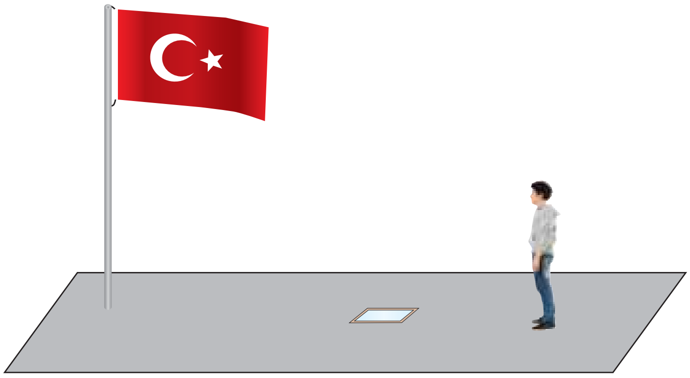
Yolun genişliği 8 m olur.

Sıra Sizde

25 cm uzunluğunda olan ve ışık geçirmeyen bir boru, bir duvar ile yerde bulunan bir ışık kaynağının arasına dik bir şekilde yerleştiriliyor.

Borunun duvar ile arasındaki mesafe 3 m; ışık kaynağı ile arasındaki mesafe ise 1,5 m olduğuna göre oluşan gölgenin boyu kaç santimetredir?

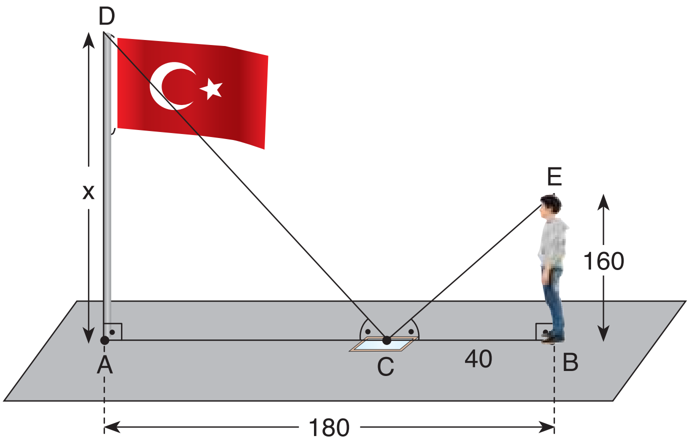
Örnek

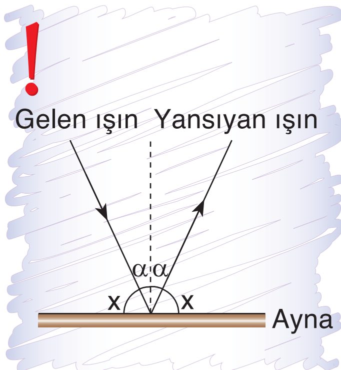


160 cm boyundaki Kemal okul bahçesindeki bayrak direğinin boyunu ölçmek istiyor. Bunun için bayrak direği, kendisi ve ayna doğrusal olacak şekilde bayrak direği ile kendisi arasına yere bir ayna koyuyor. Bu ayna kendisinden 40 cm uzaklıkta iken aynada direğin tepe noktasını görebiliyor.

Kemal ile bayrak direği arasında 180 cm uzaklık olduğuna göre direğin boyunun yaklaşık olarak kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm





$|AB| = 180$ cm ise $|AC| = |AB| - |BC| = 180 - 40 = 140$ cm olur.

Bayrak direği ve Kemal zemine dik olduklarından

$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{EBC}) = 90°$ dir.

Yansıma kuralına göre aynaya gelen ışık aynadan aynı açıyla yansıdığından $m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{ECB})$ olur. O hâlde $\overset{\triangle}{ADC} \sim \overset{\triangle}{BEC}$ dir.

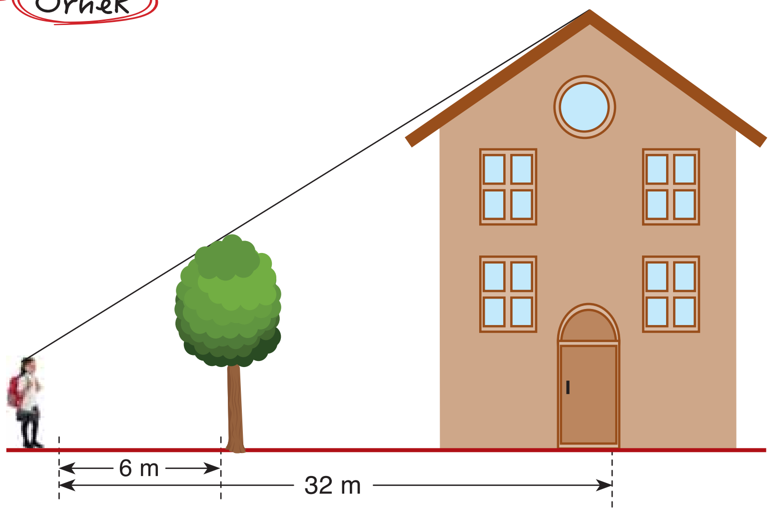
Buradan $\dfrac{|AD|}{|BE|} = \dfrac{|AC|}{|BC|} \Rightarrow \dfrac{x}{160} = \dfrac{140}{40}$

$\Rightarrow x = 140 \cdot 4$

$\Rightarrow 560$ cm bulunur.

Direğin boyu yaklaşık 560 cm olur.

Örnek

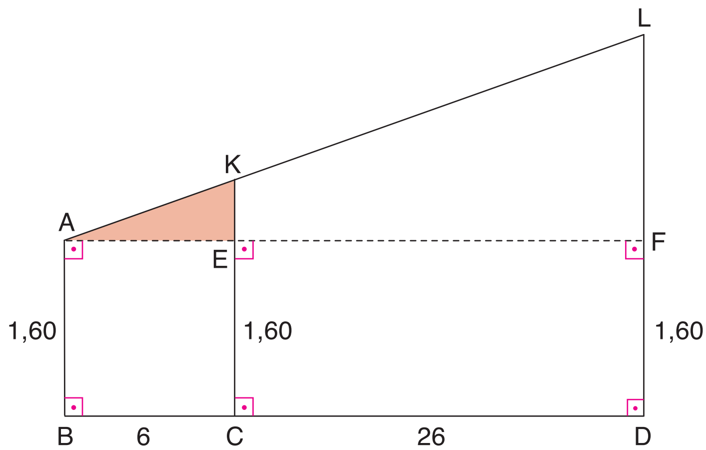


Yaşadığı evin yerden yüksekliğini hesaplamak isteyen 1,60 boyundaki Zehra, evinden 32 m uzaklaşıp evine doğru bakıyor. Kendisinden 6 m uzaklıkta bulunan 4 m boyundaki ağacın en üst noktasıyla evinin en üst kısmını aynı hizada görüyor.

Zehra, ağaç ve ev doğrusal bir konumda olduklarına göre evin yüksekliğinin yaklaşık kaç metre olduğunu bulalım.

Çözüm

Verilenleri aşağıdaki gibi modelleyelim.

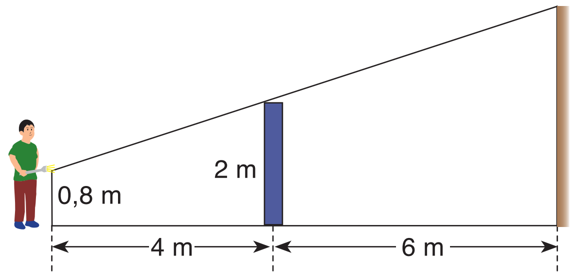


$|KE| = |KC| - |EC| = 4 - 1{,}6 = 2{,}4$ m olur.

$\widehat{AKE} \sim \widehat{ALF}$ olup $\dfrac{|KE|}{|LF|} = \dfrac{|AE|}{|AF|} \Rightarrow \dfrac{2{,}4}{|LF|} = \dfrac{6}{32} \Rightarrow |LF| = 12{,}8$ m olur.

O hâlde evin yüksekliği yaklaşık olarak
$|LD| = |LF| + |FD| = 12{,}8 + 1{,}6 = 14{,}4$ m olur.

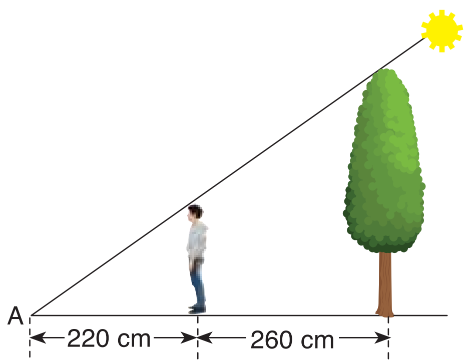
1.



Burak ışık geçirmeyen 2 m yüksekliğindeki bir engelden 4 m uzaklıkta durmaktadır. Bu engele doğru yerden 0,8 m yükseklikten fener tuttuğunda engelin arkasındaki ve engele uzaklığı 6 m olan duvarı görmemektedir.

Burak, engeli duvara doğru kaç metre yaklaştırırsa duvarın 1 metrelik kısmını görür?

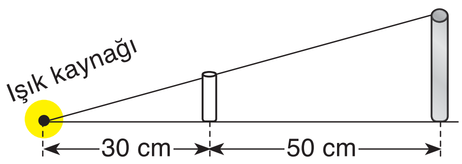
2.



Cemal, şekildeki gibi ağacın gölgesinin uç noktası ile kendi gölgesinin uç noktası A noktasında çakışacak şekilde ağaçtan 260 cm uzaklıkta duruyor.

Cemal'in boyu 176 cm ve gölgesinin boyu 220 cm olduğuna göre ağacın boyu kaç santimetredir?

3.

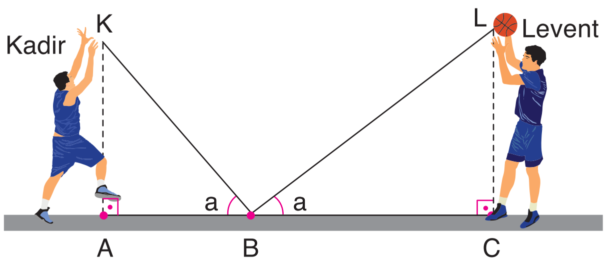


12 cm uzunluğundaki bir muma 30 cm uzaklıktan şekildeki gibi bir ışık kaynağı tutulduğunda mumdan 50 cm uzaklıkta gölgesi oluşuyor.

Mumun boyu 3 cm kısalırsa gölgesinin boyu kaç santimetre kısalır?

4. Güneşli bir günde belli bir anda 2,4 m uzunluğundaki bir ağacın gölgesinin boyu 1,6 m olmaktadır. Aynı anda gölgesinin uzunluğu 4,8 m olan bir ağacın boyu kaç metredir?

5.



Kadir elindeki topu yerden 1,8 m yükseklikten ve kendinden 2,7 m uzaklığa atıyor. B noktasına değdikten sonra zıplayan topu Levent yerden 2 m yükseklikte tutuyor.

$m(\widehat{KBA}) = m(\widehat{LBC})$ olduğuna göre Levent'in topun yere değdiği noktaya olan uzaklığı kaç metredir?

Sembol ve Gösterimler

n_A

n'_A

V_a

G

h_a

9.4.3. ÜÇGENİN YARDIMCI ELEMANLARI

Sivas Ulu Cami Anadolu'nun en eski camilerindendir. Bu cami minaresinin eğikliği ile dikkat çekmektedir. Caminin minaresi kendi eksenine göre 25° eğik durumdadır. Her yıl eğilmeye devam eden minarenin yıkılmaması için yenileme çalışmaları yapılmaktadır.

- Minarenin eğilmesine karşın henüz yıkılmamasının nedeni ne olabilir?
- Binalarda ağırlık merkezinin en uygun noktada oluşturulması binanın her türlü yük altında daha dayanıklı olmasını sağlar mı?

9.4.3.1. Üçgenin İç ve Dış Açıortayları

» Kağıt katlama yöntemi ile bir üçgenin bir iç açısının açıortayını nasıl bulursunuz?

! Üçgenin açıortayı, kenarortayı ve yüksekliği üçgenin yardımcı elemanlarıdır.

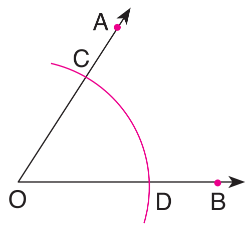
Örnek

Cetvel ile bir açı oluşturalım. Oluşturduğumuz açıyı pergel ve cetvel yardımı ile iki eş açıya ayıralım.

Çözüm

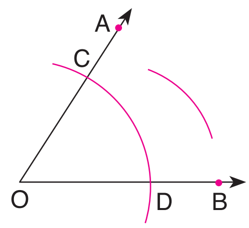
1. Adım

Pergelin sivri ucunu O noktasına koyalım. Açının kollarını C ve D noktasında kesen bir yay çizelim.



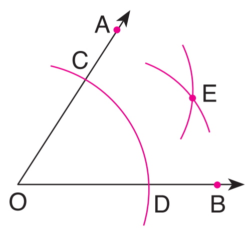
2. Adım

Pergeli |CO| nun yarısından fazla olacak şekilde açalım. Merkezi D olan bir yay çizelim.



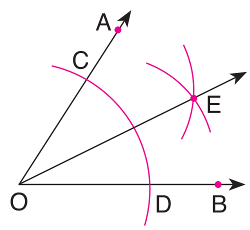
3. Adım

Pergelin açıklığını bozmadan merkezi C olan ve bir önceki yayı kesen bir yay çizelim. Yayların kesim noktasına E diyelim.



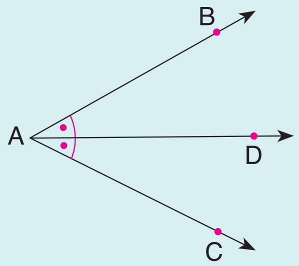
4. Adım

O ile E noktalarını birleştirelim. [OE $\widehat{AOB}$ nı iki eş açıya ayırır.



Bilgi Kutusu

Bir açıyı eş iki parçaya ayıran ışına **açıortay** denir.

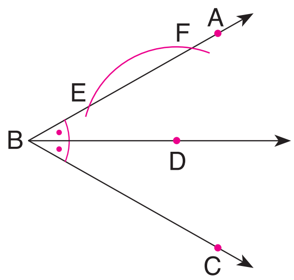


$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{CAD})$ olmak üzere, [AD, $B\widehat{A}C$ nın açıortayıdır.

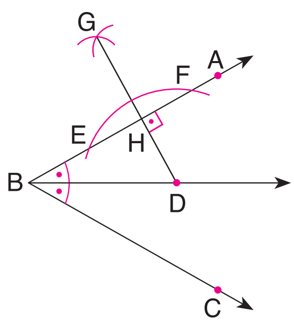
Örnek

Açıortay üzerinde alınan bir noktadan açının kollarına indirilen dikmelerin uzunluklarını inceleyelim.

Çözüm



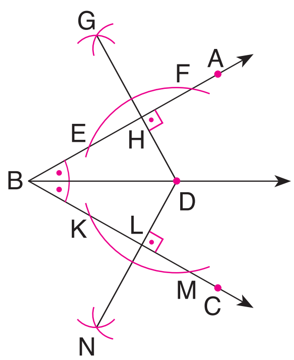
Pergelin sivri ucunu D noktasına koyarak [BA nı E ve F noktalarında kesen bir yay çizelim.



Pergelin sivri ucunu aynı açıklıkta sırası ile E ve F noktalarına koyarak birbirini kesen iki yay çizelim.

Bu kesim noktasına G diyelim. G ve D noktasını birleştirerek [GD] oluşturalım.

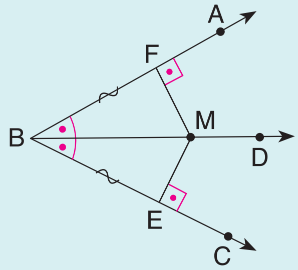
[GD] nın [BA nı kestiği noktaya H diyelim. Burada [DH] ⊥ [AB] dır.

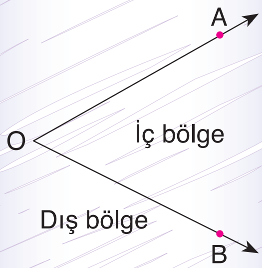


Aynı işlemleri sırası ile [BC için yapalım. Cetvel kullanarak |DH| ve |DL| uzunluğunu ölçersek |DH| = |DL| olduğunu görürüz.

Bilgi Kutusu

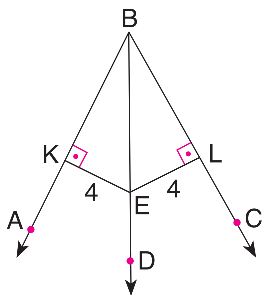
- Bir açının açıortayı üzerinde alınan herhangi bir noktadan açının kollarına çizilen dikmelerin uzunlukları eşittir. Yani |FM| = |ME| dir. Bu teoremin karşıt tersi de doğrudur.
- $\widehat{BFM} \cong \widehat{BEM}$ olduğundan |BF| = |BE| tir.





Bir açının oluşturduğu iç ve dış bölgeler yukarıdaki gibidir.

Örnek



Şekilde [EK] ⊥ [BA, [EL ⊥ [BC,

|EK| = |EL| = 4 cm,

$m(\widehat{ABD}) = 3x - 1°$ ve $m(\widehat{DBC}) = x + 19°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

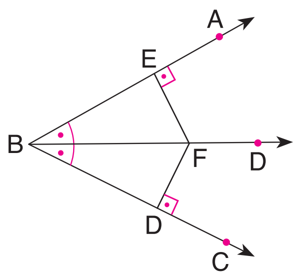
Çözüm

E noktası $\widehat{ABC}$ nın kollarına eşit uzaklıkta olduğundan [BD açıortaydır. Açıortay bir açıyı iki eş açıya ayırdığından $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC})$ dür.

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC}) \Rightarrow 3x - 1° = x + 19° \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10°$ olur.

$m(\widehat{ABC}) = (3x - 1)° + (x + 19)° = 4x° + 18° = 4 \cdot 10° + 18° = 58°$ olur.

Örnek



Şekilde [BD $\widehat{ABC}$ na ait açıortaydır.

[EF] ⊥ [AB], [DF] ⊥ [BC],

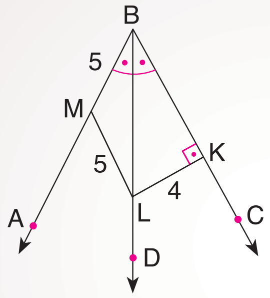
|EF| = (x + 4) cm ve |DF| = (2x – 3) cm

olduğuna göre x in santimetre cinsinden değerini bulalım.

Çözüm

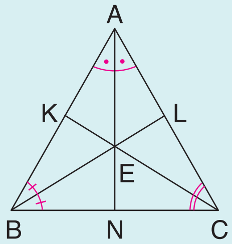
Açıortay üzerinde alınan bir noktanın açının kollarına uzaklığı eşit olduğunda |DF| = |EF| dur. O hâlde 2x – 3 = x + 4 ise x = 7 cm bulunur.

Sıra Sizde



Şekilde $\widehat{ABC}$ nın açıortayı [BD dır. $|BM| = |ML| = 5$ cm, $[BK] \perp [KL]$ ve $|KL| = 4$ cm olduğuna göre $|BK|$ kaç santimetredir?

Bilgi Kutusu



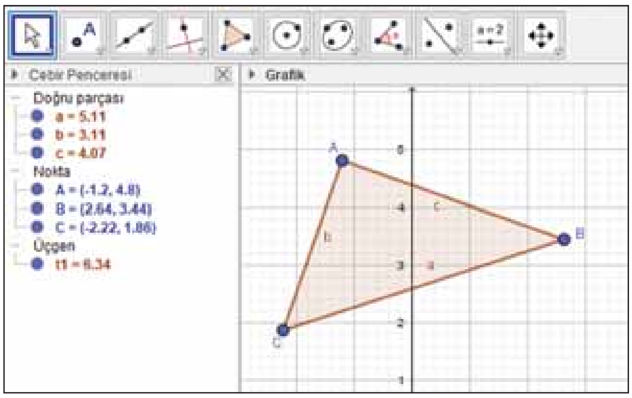
Bir üçgenin bir iç açısını eş iki parçaya ayıran ışının, açının köşesi ile karşı kenar arasında kalan parçasına üçgenin o köşesine ait açıortayı denir. $\widehat{BAC}$ na ait açıortayın uzunluğu n_A ile gösterilir. Üçgenin üç iç açıortayı üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesişir.

Örnek

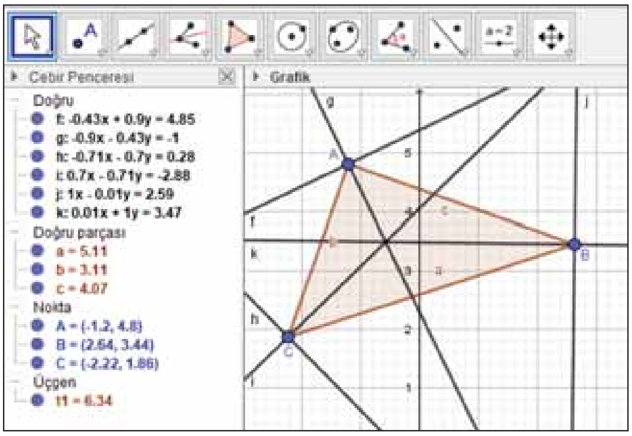
Üçgenin iç açıortayların üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesiştiğini dinamik matematik programı yardımıyla gösterelim.

Çözüm

Dinamik matematik programlarından GeoGebra programını kullanalım. Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayalım. Ardından grafik penceresinde üç farklı noktayı birleştirerek bir ABC üçgeni oluşturalım.



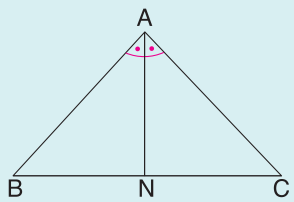
Daha sonra programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Açıortay" kısmına tıklayalım. Ardından üçgenin her bir köşesinde kesişen iki kenara tıklayarak açıortayları oluşturalım.



Sonuç olarak üçgenin iç açıortaylarının üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesiştiği görülmektedir.

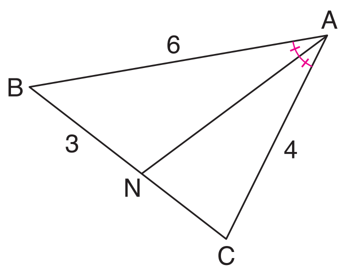
Bilgi Kutusu

İç Açıortay Teoremi



$\widehat{ABC}$ nde A köşesine ait iç açıortay [AN] ise $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|BN|}{|NC|}$ olur.

Örnek

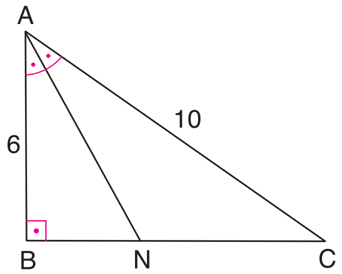


$\widehat{ABC}$ nde [AN], $\widehat{BAC}$ nın açıortayıdır.
$|AB| = 6$ cm, $|AC| = 4$ cm, $|BN| = 3$ cm olduğuna göre $|NC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|BN|}{|NC|} \Rightarrow \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{|NC|} \Rightarrow |NC| = 2$ cm bulunur.

Örnek



ABC dik üçgeninde [AN], $\widehat{BAC}$ nın açıortayıdır.

$|AB| = 6$ cm, $|AC| = 10$ cm olduğuna göre $|NC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

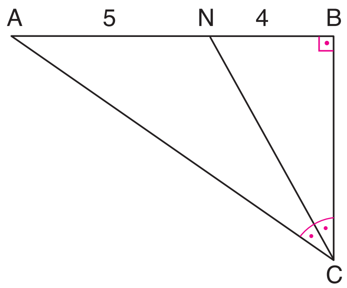
$\widehat{ABC}$ nde $10^2 = 6^2 + |BC|^2 \Rightarrow |BC|^2 = 100 - 36$

$\Rightarrow |BC|^2 = 64 \Rightarrow |BC| = 8$ cm bulunur.

$|NC| = x$ cm ise $|BN| = (8 - x)$ cm olur. İç açıortay teoreminden,

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|NC|} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{8-x}{x} \Rightarrow 6x = 80 - 10x \Rightarrow x = 5 \text{ cm olur.}$$

Örnek



ABC dik üçgeninde [CN], $\widehat{ACB}$ nın açıortayıdır.

$|AN| = 5$ cm, $|BN| = 4$ cm olduğuna göre $|AC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

İç açıortay teoreminden, $\dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{|BN|}{|AN|} \Rightarrow \dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{4}{5}$ olur.

$x \in \mathbb{R}^+$, $|BC| = 4x$, $|AC| = 5x$ ise $\widehat{ABC}$ nde Pisagor bağıntısından

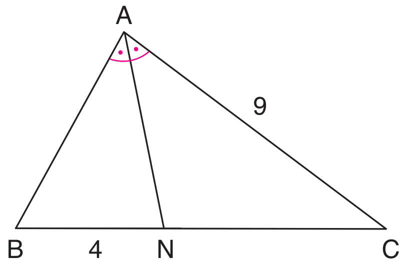
$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB|^2 \Rightarrow (5x)^2 = (4x)^2 + 9^2$

$\Rightarrow 25x^2 = 16x^2 + 81$

$\Rightarrow 9x^2 = 81 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ olur.

Buradan $|AC| = 5 \cdot x = 5 \cdot 3 = 15$ cm bulunur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde [AN], $\widehat{BAC}$ nın açıortayıdır.

|AB| = |NC| = x, |BN| = 4 cm,

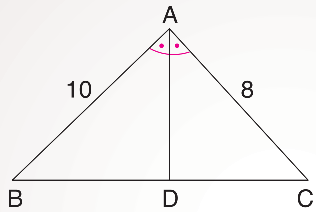
|AC| = 9 cm olduğuna göre |AB| nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

İç açıortay teoreminden,

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|NC|} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{4}{x} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6 \text{ cm bulunur.}$$

Sıra Sizde

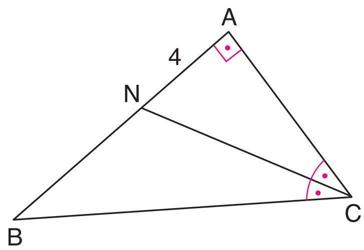


$\widehat{ABC}$ nde [AD], $\widehat{BAC}$ nın iç açıortaydır.

|AB| = 10 cm, |AC| = 8 cm,

Ç($\widehat{ABC}$) = 30 cm olduğuna göre |BD| kaç santimetredir?

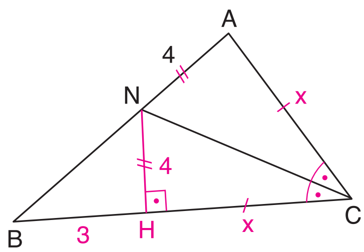
Örnek



ABC dik üçgeninde [CN], $\widehat{ACB}$ nın açıortayıdır.

|AN| = 4 cm, |BC| – |AC| = 3 cm olduğuna göre |BN| nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



[NH] ⊥ [BC] olacak şekilde [NH] çizelim. [CN] açıortay olduğundan

|AN| = |NH| = 4 cm ve

|AC| = |HC| = x cm olur.

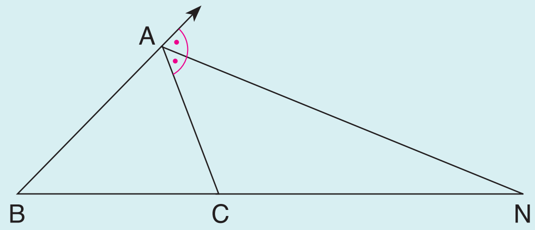
|AC| = x ise |BC| = (x + 3) cm olur.

Bu durumda |BH| = 3 cm olur.

$\widehat{BHN}$ nde Pisagor teoreminden, $|BN|^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow |BN| = 5$ cm olur.

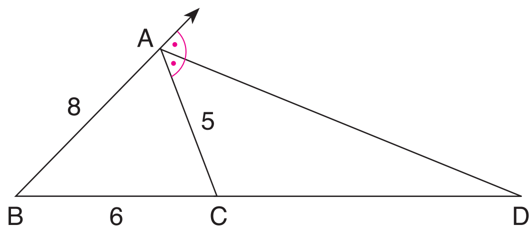
Bilgi Kutusu

Dış Açıortay Teoremi



$\widehat{ABC}$ de A köşesindeki dış açıyı iki eş parçaya ayıran ışının, açının köşesi ile [BC] nın uzantısını kestiği nokta arasında kalan doğru parçasına üçgenin A köşesine ait dış açıortayı denir. Dış açıortayın uzunluğu n'_A ile gösterilir. A köşesine ait dış açıortay [BC] nın uzantısını N noktasına kesiyorsa $\frac{|NC|}{|NB|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ olur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde [AD], A köşesine ait dış açıortaydır.

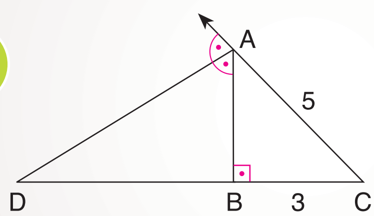
$|AB| = 8$, $|BC| = 6$ cm ve $|AC| = 5$ cm olduğuna göre $|DC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$|DC| = x$ cm olsun. Dış açıortay teoremine göre

$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow \frac{x}{x+6} = \frac{5}{8} \Rightarrow 8x = 5x + 30 \Rightarrow x = 10 \text{ cm olur.}$$

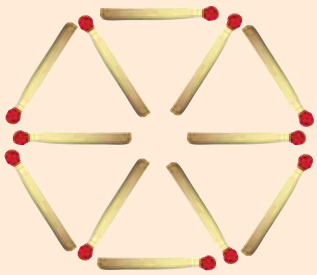
Sıra Sizde



ABC dik üçgeninde A köşesine ait dış açıortay [AD] dır.

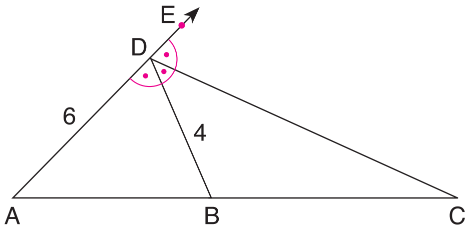
$|AC| = 5$ cm, $|BC| = 3$ cm olduğuna göre $|BD|$ kaç santimetredir?

KİBRİTLER



Yukarıdaki kibritlerden dördünün yerini değiştirerek 3 adet eşkenar üçgen elde edin.

Örnek



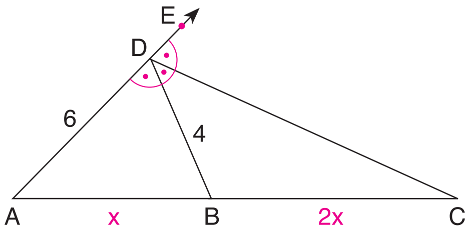
A, D, E noktaları doğrusal, $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{CDE})$, $|AD| = 6$ cm, $|BD| = 4$ cm olduğuna göre $|DC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$\overset{\frown}{ABD}$ nde [DC], D köşesine ait dış açıortaydır.

O hâlde, $\dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{|DB|}{|DA|} \Rightarrow \dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ olur.

Buradan $x \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $|BC| = 2x$ ve $|AC| = 3x$ olur.



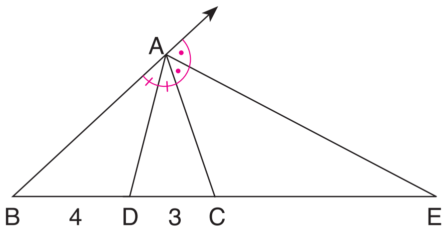
$\overset{\frown}{ADC}$ nde [DB], D köşesine ait iç açıortaydır. O hâlde

$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$$

$$\frac{6}{|DC|} = \frac{x}{2x} \Rightarrow \frac{6}{|DC|} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow |DC| = 12$ cm olur.

Örnek



$\overset{\frown}{ABC}$ nde A köşesine ait iç açıortay [AD], dış açıortay [AE] dır. $|BD| = 4$ cm, $|DC| = 3$ cm olduğuna göre $|CE|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$\overset{\frown}{ABC}$ nde iç açıortay teoremine göre $\dfrac{|BD|}{|DC|} = \dfrac{|AB|}{|AC|} \Rightarrow \dfrac{4}{3} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$ olur.

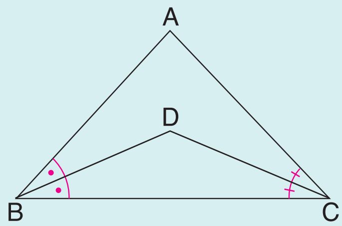
O hâlde $x \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $|AB| = 4x$, $|AC| = 3x$ olur.

$\overset{\frown}{ABC}$ nde dış açıortay teoreminden

$$\frac{|EC|}{|EC| + 7} = \frac{3x}{4x} \Rightarrow \frac{|EC|}{|EC| + 7} = \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow 4|EC| = 3|EC| + 21 \Rightarrow |EC| = 21$ bulunur.

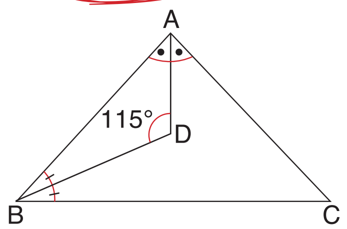
Bilgi Kutusu



$\widehat{ABC}$ nin B ve C köşelerine ait iç açıortayları D noktasında kesişiyor ise

$$m(\widehat{BDC}) = 90° + \frac{m(\widehat{BAC})}{2} \text{ olur.}$$

Örnek



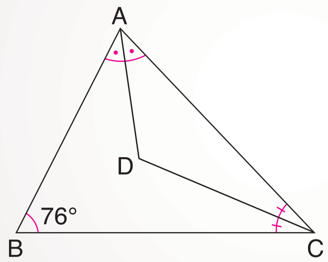
$\widehat{ABC}$ nin A ve B köşelerine ait iç açıortayları D noktasında kesişmiştir. $m(\widehat{ADB}) = 115°$ ise $m(\widehat{ACB})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

$$m(\widehat{ADB}) = 90° + \frac{m(\widehat{ACB})}{2} \Rightarrow 115° = 90° + \frac{m(\widehat{ACB})}{2}$$

$$\Rightarrow 25° = \frac{m(\widehat{ACB})}{2} \Rightarrow m(\widehat{ACB}) = 50° \text{ olur.}$$

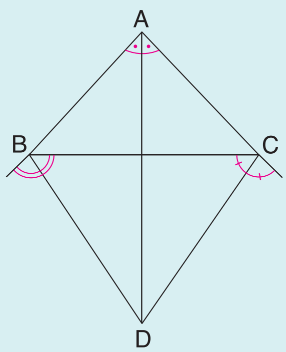
Sıra Sizde



$\widehat{ABC}$ nin A ve C köşelerine ait iç açıortayları D noktasında kesişmiştir.

$m(\widehat{ABC}) = 76°$ ise $m(\widehat{ADC})$ kaç derecedir?

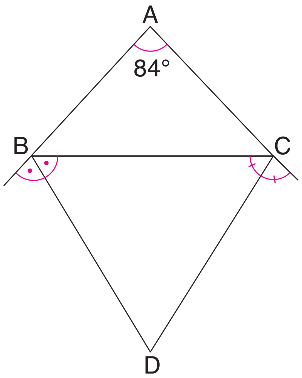
Bilgi Kutusu



$\widehat{ABC}$ nde B ve C köşelerine ait dış açıortay ile A köşesine ait iç açıortay üçgenin dışında bir noktada (D noktasında) kesişir. Bu durumda

$$m(\widehat{BDC}) = 90° - \frac{m(\widehat{BAC})}{2} \text{ olur.}$$

Örnek



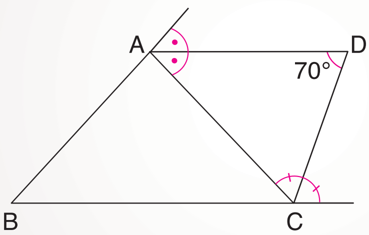
$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{BAC}) = 84°$, [BD] ile [CD] bulundukları köşelere ait dış açıortaylar olduğuna göre $m(\widehat{BDC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

$$m(\widehat{BDC}) = 90° - \frac{m(\widehat{BAC})}{2} \Rightarrow m(\widehat{BDC}) = 90° - \frac{84°}{2} \Rightarrow m(\widehat{BDC}) = 48° \text{ olur}$$

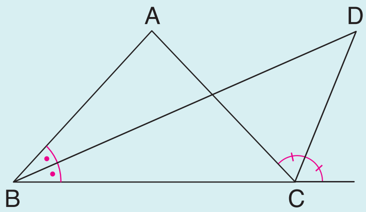
.

Sıra Sizde



$m(\widehat{ADC}) = 70°$, [AD] ile [CD] bulundukları köşelere ait dış açıortaylar ise $m(\widehat{ABC})$ kaç derecedir?

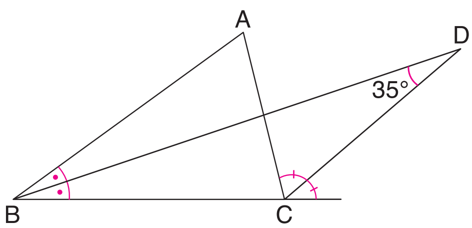
Bilgi Kutusu



$\widehat{ABC}$ nde B köşesine ait iç açıortay ile C köşesine ait dış açıortay D noktasında kesişmiştir. Buna göre

$$m(\widehat{BDC}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2} \text{ olur.}$$

Örnek



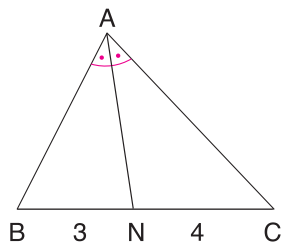
$\widehat{ABC}$ nde B köşesine ait iç açıortay ile C köşesine ait dış açıortay D noktasında kesişmiştir.

$m(\widehat{BDC}) = 35°$ ise $m(\widehat{BAC})$ nü bulalım.

Çözüm

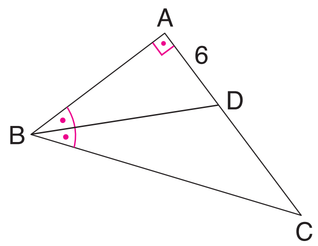
$$m(\widehat{BDC}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2} \Rightarrow 35° = \frac{m(\widehat{BAC})}{2} \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 70° \text{ bulunur.}$$

1.



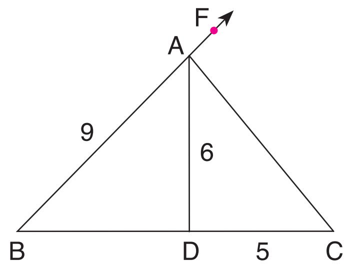
$\widehat{ABC}$ nde [AN], A köşesine ait açıortay, |BN| = 3 cm, |NC| = 4 cm ve Ç($\widehat{ABC}$) = 20 cm olduğuna göre |AB| ve |AC| kaç santimetredir?

2.



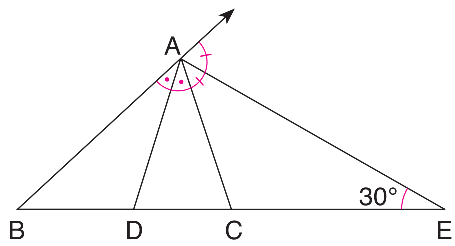
ABC dik üçgeninde [BA] ⊥ [AC], [BD], B köşesine ait açıortay, |AD| = 6 cm, |BC| – |AB| = 8 cm olduğuna göre |DC| kaç santimetredir?

3.



$\widehat{ABD}$ nde [AC], A köşesine ait dış açıortay, |AB| = 9 cm, |AD| = 6 cm ve |DC| = 5 cm olduğuna göre |BD| kaç santimetredir?

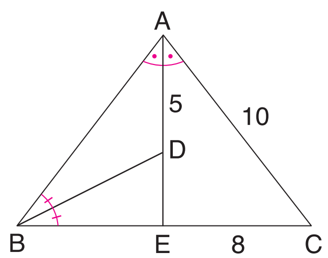
4.



$\widehat{ABC}$ nde A köşesine ait iç açıortay [AD] ve dış açıortay [AE] dır.

m($\widehat{AEC}$) = 30° olduğuna göre m($\widehat{ADE}$) kaç derecedir?

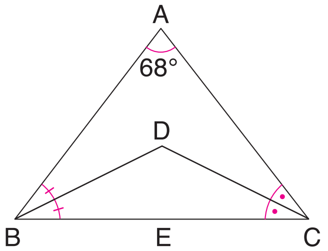
5.



$\widehat{ABC}$ nde [AE], A açısına ait ve [BD], B açısına ait iç açıortaylardır.

|AC| = 10 cm, |AD| = 5 cm ve |EC| = 8 cm olduğuna göre |DE| kaç santimetredir?

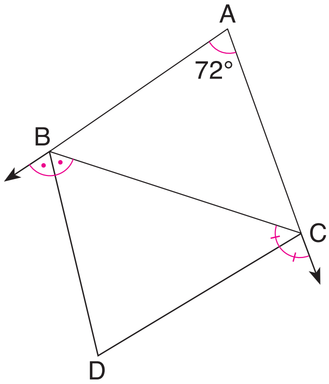
6.



$\widehat{ABC}$ nde B ve C açısına ait iç açıortaylar D noktasında kesişmiştir.

$m(\widehat{BAC}) = 68°$ olduğuna göre $m(\widehat{BDC})$ kaç derecedir?

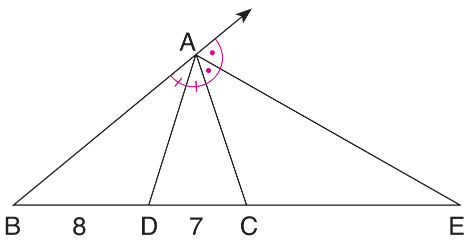
7.



$\widehat{ABC}$ nde B ve C açılarına ait dış açıortaylar D noktasında kesişmiştir.

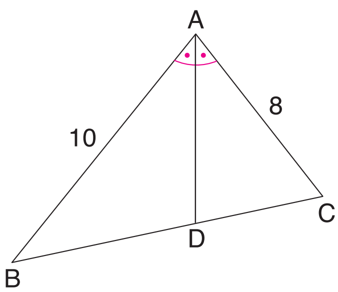
$m(\widehat{BAC}) = 72°$ olduğuna göre $m(\widehat{BDC})$ kaç derecedir?

8.



$\widehat{ABC}$ nde A köşesine ait iç açıortay [AD], dış açıortay [AE] dır. $|BD| = 8$ cm, $|DC| = 7$ olduğuna göre $|CE|$ kaç santimetredir?

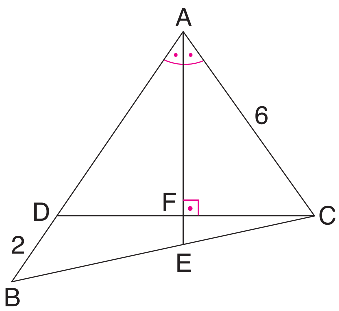
9.



$\widehat{ABC}$ nde [AD], A köşesine ait iç açıortaydır.

$|AB| = 10$ cm ve $|AC| = 8$ cm olduğuna göre $|AD|$ nun santimetre cinsinden alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

10.



$\widehat{ABC}$ nde [AE], A köşesine ait iç açıortay, $[AE] \perp [DC]$,

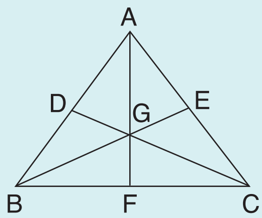
$|DF| = |FC|$, $|AC| = 6$ cm, $|DB| = 2$ cm olduğuna göre

$\dfrac{|BE|}{|EC|}$ kaçtır?

9.4.3.2. Üçgenin Kenarortayları

» Kâğıt katlama yöntemi ile bir üçgenin bir kenarına ait kenarortayı nasıl bulursunuz?

Bilgi Kutusu



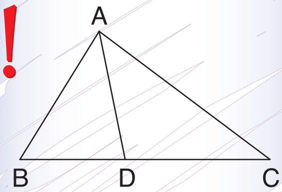
A köşesinden çizilen kenarortay [AF] dır ve V_a ile gösterilir.

B köşesinden çizilen kenarortay [BE] dır ve V_b ile gösterilir.

C köşesinden çizilen kenarortay [CD] dır ve V_c ile gösterilir.

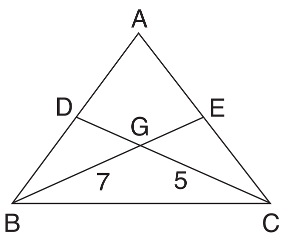
Bir üçgenin kenarortayları üçgenin içinde bir noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin ağırlık merkezi denir ve G ile gösterilir. Yukarıdaki şekilde $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi G dir ve ağırlık merkezi üçgenin kenarortaylarını 2 ye 1 oranında böler.

$\frac{|AG|}{|GF|} = \frac{|BG|}{|GE|} = \frac{|CG|}{|GD|} = 2$ olur.



Bir üçgende, bir köşeyi karşısındaki kenarın orta noktasına birleştiren doğru parçasına, üçgenin o kenarına ait kenarortayı denir. ABC üçgeninde BC kenarına ait kenarortay [AD] dır.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $|AE| = |EC|$ ve $|AD| = |DB|$ dır. $|BG| = 7$ cm, $|CG| = 5$ cm olduğuna göre $|GD| + |GE|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

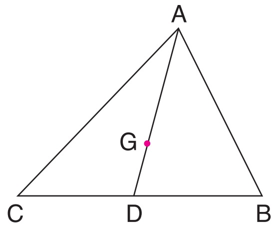
Çözüm

D ve E noktaları bulundukları kenarların orta noktaları olduğundan G, ağırlık merkezidir.

O hâlde $|GD| = \frac{|CG|}{2} = \frac{5}{2}$ cm ve $|GE| = \frac{|BG|}{2} = \frac{7}{2}$ cm olur.

Buradan $|GD| + |GE| = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 6$ cm bulunur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi G noktasıdır.

$|AG| = (3x + 4)$ cm, $|GD| = (x + 5)$ cm olduğuna göre $|AD|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

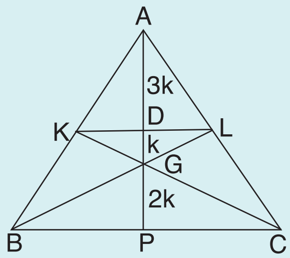
G noktası ağırlık merkezi olduğundan

$$\frac{|AG|}{|GD|} = 2 \Rightarrow \frac{3x+4}{x+5} = 2 \Rightarrow 3x + 4 = 2x + 10 \Rightarrow x = 6 \text{ bulunur.}$$

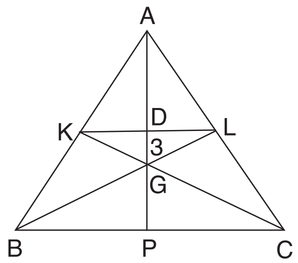
Buradan $|AD| = (3x + 4) + (x + 5) = 4x + 9 = 4 \cdot 6 + 9 = 33$ cm bulunur.

Bilgi Kutusu

Üçgenin ağırlık merkezi ile orta tabanın kenarortay üzerinde ayırdığı uzunluklar köşeden başlamak üzere 3, 1 ve 2 sayılarıyla orantılıdır.



Örnek



G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezidir.

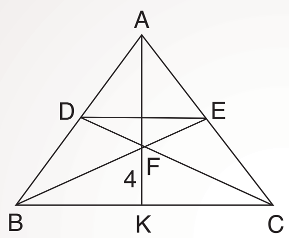
$|DG| = 3$ cm olduğuna göre $|AP|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

G ağırlık merkezi olduğundan $|AD| = 3k$, $|DG| = k$ ve $|GP| = 2k$ olur.

$|DG| = k = 3$ cm olduğundan $|AP| = 3k + k + 2k = 6k = 6 \cdot 3 = 18$ cm olur.

Sıra Sizde



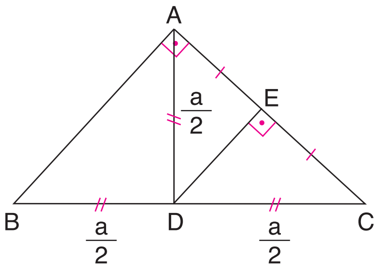
Şekilde D ve E noktaları üzerinde bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

$|FK| = 4$ cm olduğuna göre $|AK|$ kaç santimetredir?

Örnek

Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğunun, hipotenüs uzunluğunun yarısı olduğunu gösterelim.

Çözüm



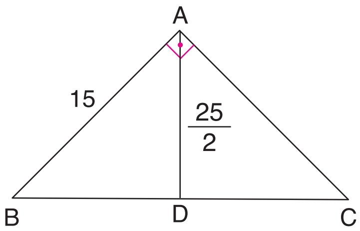
ABC dik üçgeninde [AD] kenarortay olsun. D noktasından [AB] // [DE] olacak şekilde [DE] nı çizelim.

[AB] // [DE] ve $|BD| = |DC|$ olduğundan $|AE| = |EC|$ ve $[DE] \perp [AC]$ olur.

$|BC| = a$ olsun.

$\widehat{ADC}$ nde [DE] hem yükseklik hem kenarortay olduğundan $\widehat{ADC}$ ikizkenar üçgendir ve $|AD| = |DC| = \frac{a}{2}$ olur. Buradan $|AD| = \frac{a}{2}$ olur.

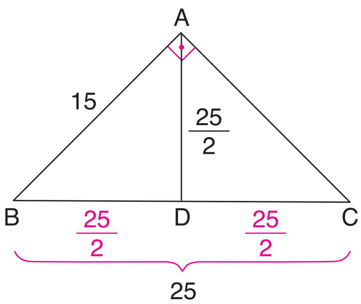
Örnek



ABC dik üçgeninde D noktası üzerinde bulunduğu kenarın orta noktasıdır.

$|AB| = 15$ cm, $|AD| = \frac{25}{2}$ cm olduğuna göre $|AC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



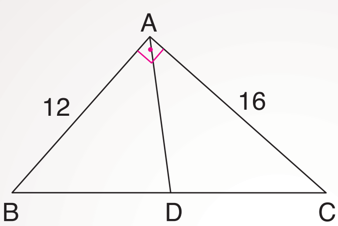
$[AB] \perp [AC]$ olduğundan

$|AD| = |BD| = |DC| = \frac{25}{2}$ cm olur.

ABC dik üçgeninde Pisagor bağıntısından,

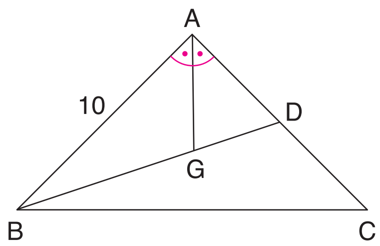
$$25^2 = 15^2 + |AC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = 625 - 225$$
$$\Rightarrow |AC|^2 = 400$$
$$\Rightarrow |AC| = 20 \text{ cm olur.}$$

Sıra Sizde



ABC dik üçgeninde $|BD| = |DC|$, $|AB| = 12$ cm, $|AC| = 16$ cm olduğuna göre $|AD|$ kaç santimetredir?

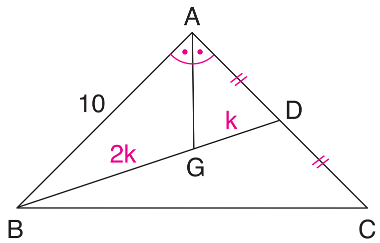
Örnek



G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezidir.

[AG], A köşesine ait iç açıortay ve $|AB| = 10$ cm olduğuna göre $|AC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



G ağırlık merkezi ise $\frac{|BG|}{|GD|} = 2$ olduğundan $|BG| = 2k$ ve $|GD| = k$ olur.

$\widehat{ABD}$ nde [AG] açıortay ise

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BG|}{|GD|} \Rightarrow \frac{10}{|AD|} = \frac{2k}{k} \Rightarrow 2|AD| = 10 \Rightarrow |AD| = 5 \text{ cm olur.}$$

Bu durumda $|AC| = |AD| + |DC| = 5 + 5 = 10$ cm bulunur.

Örnek

Üçgen çeşitlerine bağlı olarak üçgen üzerinde yapılan değişikliklerin kenarortaylar üzerindeki etkisini dinamik matematik programı yardımıyla inceleyelim.

Çözüm

Dinamik matematik programlarından GeoGebra programını kullanalım. Programın "Araç Çubuğu"bölümünde "Çokgen" kısmına tıklayalım. Ardından grafik penceresinde üç farklı noktayı birleştirerek bir ABC üçgeni oluşturalım.

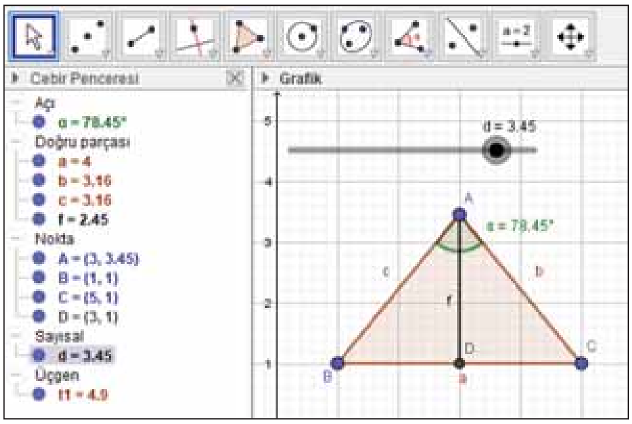
"Araç Çubuğu" bölümünden "Taşı" kısmına tıklayalım ve ardından grafik penceresindeki A noktasına çift tıklayalım. Bu noktanın ikinci bileşeni yerine d yazalım.

Daha sonra "Araç Çubuğu" bölümünden "Sürgü" kısmına tıklayalım, açılan pencerede "Ad" kısmına d yazarak "Tamam" butonuna basalım.

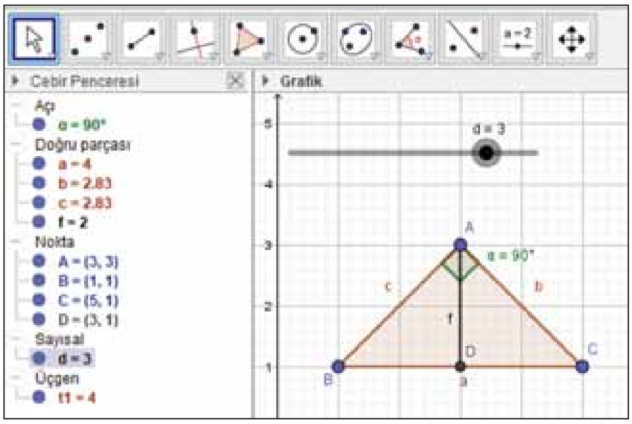
Ardından "Araç Çubuğu" bölümünden "Açı" kısmına tıklayarak A köşesindeki açıyı belirleyelim. "Araç Çubuğu" bölümünden "Orta Nokta ve Merkez" kısmına tıklayalım. Daha sonra BC doğru parçasına tıklayarak orta noktası olan D noktasını belirleyelim.

"Araç Çubuğu" bölümünden "Doğru Parçası" kısmına tıklayarak A ve D noktalarını birleştirelim. Böylece BC kenarına ait kenarortay olan AD doğru parçasını oluşturalım.

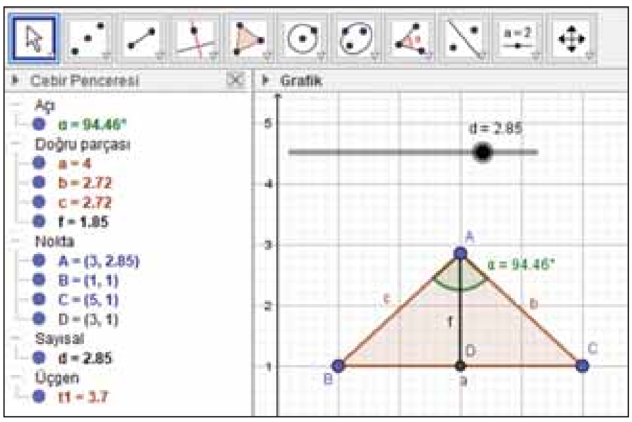
A açısının ölçüsü 90° den küçük iken $|AD| > \frac{|BC|}{2}$ olur.



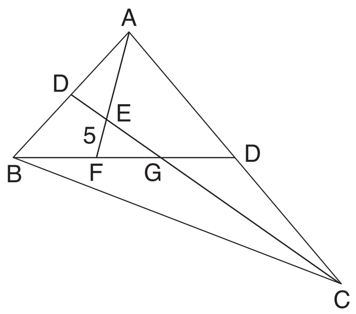
A açısının ölçüsü 90° iken $|AD| = \frac{|BC|}{2}$ olur.



A açısının ölçüsü 90° den büyük iken $|AD| < \frac{|BC|}{2}$ olur.



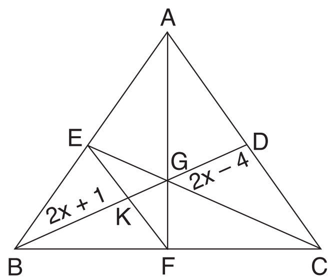
1.



G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezidir.

$|FG| = |GD|$ ve $|FE| = 5$ cm olduğuna göre $|AE|$ kaç santimetredir?

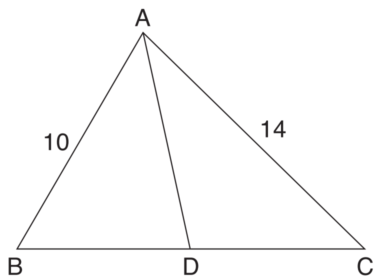
2.



G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezidir.

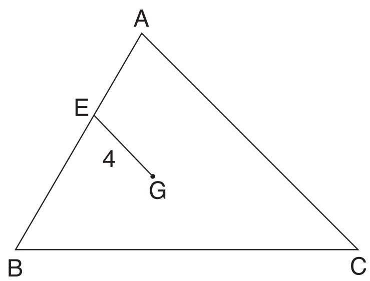
$|BK| = (2x + 1)$ cm ve $|GD| = (2x – 4)$ cm olduğuna göre $|KG|$ kaç santimetredir?

3.



$\widehat{ABC}$ nde $|BD| = |DC|$, $|AB| = 10$ cm ve $|AC| = 14$ cm olduğuna göre $|AD|$ nun santimetre cinsinden alabileceği tam sayı değerleri kaç tanedir?

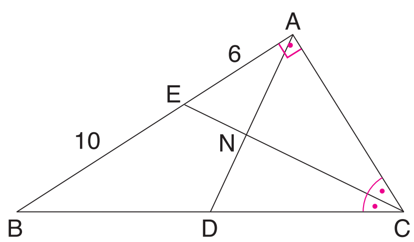
4.



G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezidir.

[EG] // [AC], $|EG| = 4$ cm olduğuna göre $|AC|$ kaç santimetredir?

5.



ABC dik üçgeninde $|AE| = 6$ cm, $|EB| = 10$ cm, $|BD| = |DC|$ ve [CE], $\widehat{ACB}$ nın açıortayı olduğuna göre $|AN|$ kaç santimetredir?

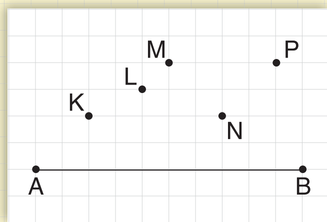
6. $\widehat{MLK}$ için $m(\widehat{M}) = 90°$ dir.

Bu üçgenin ağırlık merkezinin hipotenüse uzaklığı 5 cm olduğuna göre M köşesinin hipotenüse olan uzaklığı kaç santimetredir?

9.4.3.3. Üçgenin Kenar Orta Dikmeleri

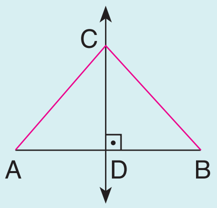
Bir doğru parçasına orta noktasından dik olan doğruya orta dikme denir.

» Yanda kareli zeminde verilen [AB] nın orta dikmesi verilen noktalardan hangisinden geçer?

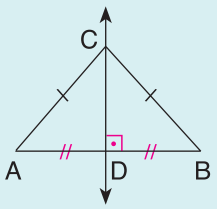


Bilgi Kutusu

- Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan her nokta, doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıktadır. CD doğrusu [AB] nin orta dikmesi ise |AC| = |BC| olur.



- Bir doğru parçasının uç noktalarından eşit uzaklıkta bulunan her nokta bu doğru parçasının orta dikmesi üzerindedir. Eğer |CA| = |CB| ise C noktası [AB] nin orta dikmesi üzerindedir.



Örnek

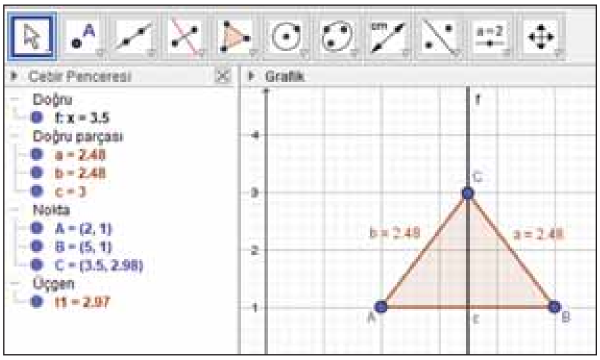
Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan her noktanın, bu doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıkta olduğunu dinamik matematik programı yardımıyla gösterelim.

Çözüm

Dinamik matematik programlarından GeoGebra programını kullanalım. Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Doğru Parçası" kısmına tıklayarak grafik penceresinde bir AB doğru parçası oluşturalım.

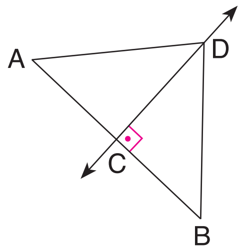
Daha sonra "Araç Çubuğu" bölümünden "Orta Dikme" kısmına tıklayalım. Ardından AB doğru parçası üzerine tıklayarak bu doğru parçasına ait orta dikme doğrusunu oluşturalım. Bu orta dikme üzerinde bir C noktası belirleyerek ACB üçgeni oluşturalım.

"Araç Çubuğu" bölümünden "Uzaklık veya Uzunluk" kısmına tıklayarak AC ve CB kenarlarının uzunluklarını gösterelim.



Sonuç olarak bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan her noktanın, bu doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıkta olduğu görülmektedir.

Örnek



Şekilde DC doğrusu, [AB] nın orta dikmesi ve $|AD| = (2x + 18)$ cm, $|BD| = (4x + 4)$ cm olduğuna göre $|AD|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

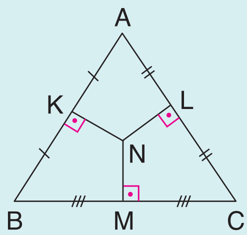
Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan her nokta doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıkta olduğundan $|AD| = |BD|$ olur.

Buradan $4x + 4 = 2x + 18 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$ bulunur.

O hâlde $|AD| = 2x + 18 = 2 \cdot 7 + 18 = 32$ cm bulunur.

Bilgi Kutusu

Üçgenin herhangi bir kenarının orta noktasından geçen ve bu kenara dik olan doğru parçasına kenar orta dikme denir. Üçgenin kenar orta dikmeleri bir noktada kesişir.



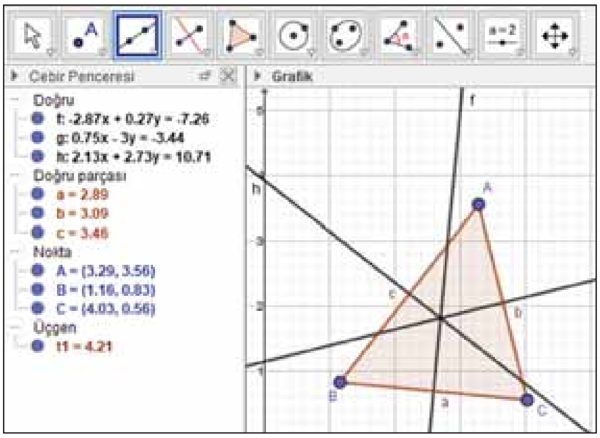
Örnek

Üçgenin kenar orta dikmelerinin bir noktada kesiştiğini dinamik matematik programı yardımıyla gösterelim.

Çözüm

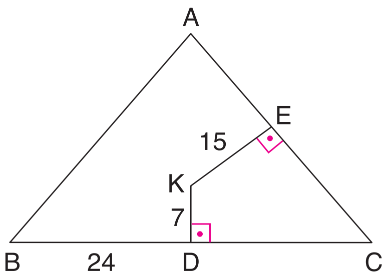
Dinamik matematik programlarından GeoGebra programını kullanalım. Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayalım.

Ardından grafik penceresinde üç farklı noktayı birleştirerek ABC üçgeni oluşturalım. Daha sonra "Araç Çubuğu" bölümünde "Orta Dikme" kısmına tıklayalım. Ardından üçgenin her bir kenarına ayrı ayrı tıklayarak bu kenarlara ait kenar orta dikmeleri oluşturalım.



Sonuç olarak üçgenin kenar orta dikmelerinin bir noktada kesiştiği görülmektedir.

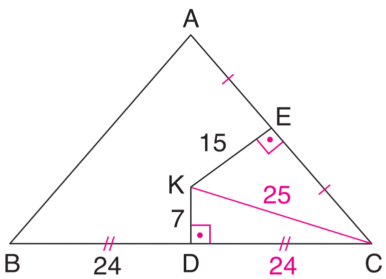
Örnek



[KD] ve [KE] $\widehat{ABC}$ nin kenar orta dikmeleridir.

$|KE| = 15$ cm, $|KD| = 7$ cm ve $|BD| = 24$ cm olduğuna göre $|AE|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



[KD] ve [KE] kenar orta dikme olduğundan

$|BD| = |DC|$ ve $|AE| = |EC|$ olur.

O hâlde $|DC| = 24$ cm olur.

K ve C noktalarını birleştirelim.

$\widehat{KDC}$ nde Pisagor bağıntısından

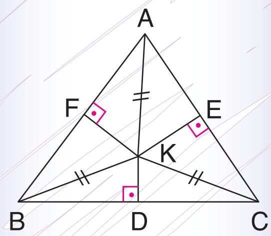
$|KC|^2 = 7^2 + 24^2 \Rightarrow |KC|^2 = 49 + 576 \Rightarrow |KC|^2 = 625 \Rightarrow |KC| = 25$ cm olur.

$\widehat{KEC}$ nde Pisagor bağıntısından

$25^2 = 15^2 + |EC|^2 \Rightarrow |EC|^2 = 625 - 225 \Rightarrow |EC|^2 = 400 \Rightarrow |EC| = 20$ cm olur.

O hâlde $|AE| = |EC|$ olduğundan $|AE| = 20$ cm bulunur.

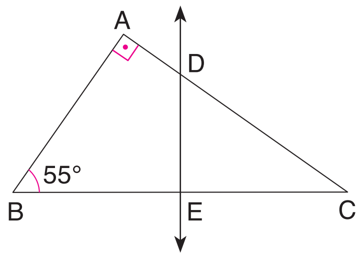
!



Bir üçgenin kenar orta dikmelerinin kesişim noktası üçgenin köşe noktalarından eşit uzaklıktadır.

K noktası ABC nin kenar orta dikmelerinin kesim noktası ise $|AK| = |KB| = |KC|$ olur.

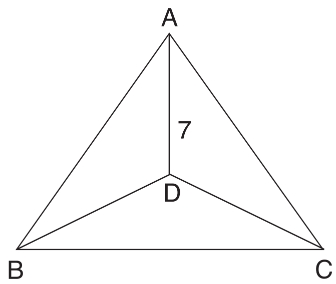
1.



ABC üçgeninde DE doğrusu, BC kenarına ait kenar orta dikmedir.

$m(\widehat{BAC}) = 90°$, $m(\widehat{ABC}) = 55°$ ise $m(\widehat{EDC})$ kaç derecedir?

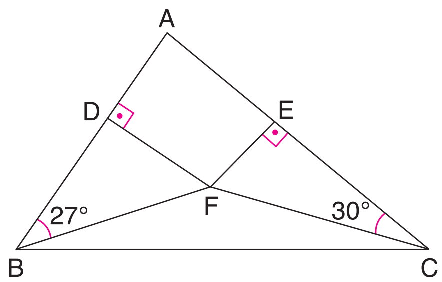
2.



D noktası $\widehat{ABC}$ nin kenar orta dikmelerinin kesim noktasıdır.

$|AD| = 7$ cm olduğuna göre $|AD| + |BD| + |DC|$ kaç santimetredir?

3.



$\widehat{ABC}$ nde [FD] ve [FE] kenar orta dikmelerdir.

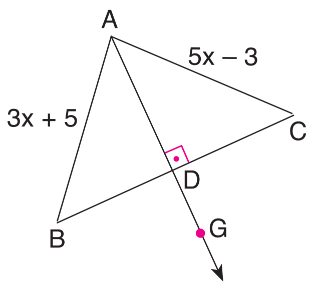
$m(\widehat{DBF}) = 27°$ ve $m(\widehat{ECF}) = 30°$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

4.

Aksaray, Nevşehir ve Niğde il merkezlerine eşit uzaklıkta olacak şekilde bir alışveriş merkezi yapılmak isteniyor. Yandaki şekilde bu şehirlerin konumları verilmiştir.

Buna göre alışveriş merkezinin nereye yapılması gerektiğini çizimle gösteriniz.

5.



Yandaki şekilde $[AG] \perp [BC]$, $|BD| = |DC|$,

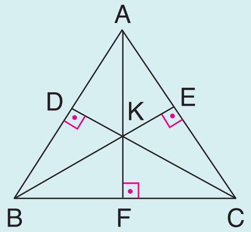
$|AB| = (3x + 5)$ cm ve $|AC| = (5x – 3)$ cm olduğuna göre $|AC|$ kaç santimetredir?

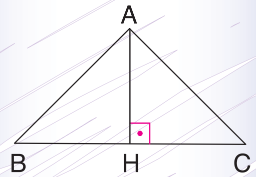
9.4.3.4. Üçgenin Yükseklikleri

» Kâğıt katlama yöntemi ile bir üçgenin bir kenarına ait kenarortayı nasıl bulursunuz?

Bilgi Kutusu

Bir üçgenin yükseklikleri aynı noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin diklik merkezi denir. Yandaki şekilde K noktası diklik merkezidir.





Bir üçgende herhangi bir köşeden karşı kenarın uzantısına dik olarak indirilen doğru parçasına o kenara ait yükseklik denir.

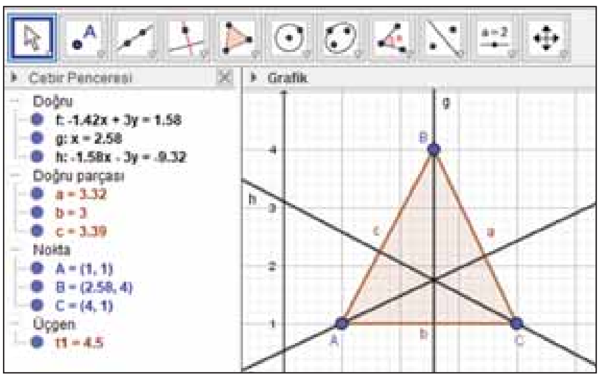
$|AH| = h_a$ ile gösterilir.

Örnek

Üçgenin çeşidine göre yüksekliklerinin kesiştiği noktanın konumunu dinamik matematik programı yardımıyla inceleyelim.

Çözüm

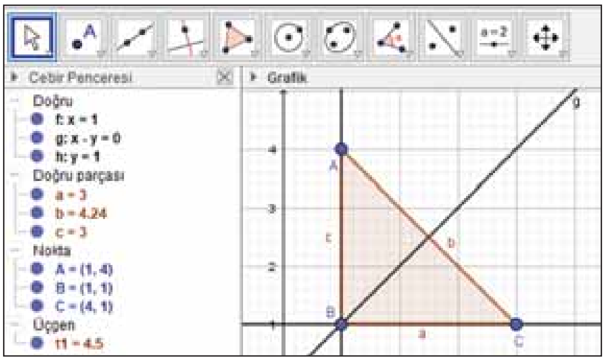
Dinamik matematik programlarından GeoGebra programını kullanalım. Dar açılı üçgende yüksekliklerin kesiştiği noktanın konumunu inceleyelim. Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayarak grafik penceresinde dar açılı bir ABC üçgeni oluşturalım. Daha sonra "Araç Çubuğu" bölümünden "Dik Doğru" kısmına tıklayalım. ABC üçgeni üzerinde A köşesine ve karşısındaki kenara, B köşesine ve karşısındaki kenara, C köşesine ve karşısındaki kenara tıklayarak üçgenin yüksekliklerini oluşturalım.



Sonuç olarak dar açılı üçgende yüksekliklerin üçgenin iç bölgesinde kesiştiği görülmektedir.

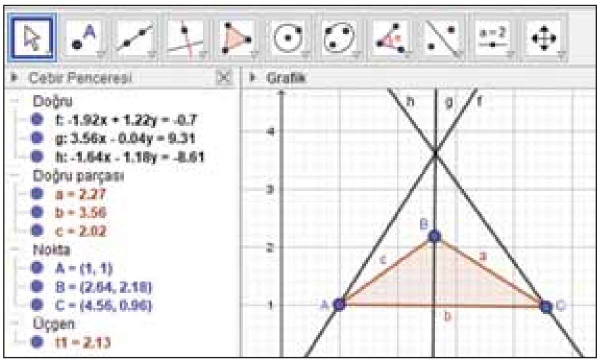
Dik açılı üçgende yüksekliklerin kesiştiği noktanın konumunu inceleyelim. Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayarak grafik penceresinde dik açılı bir ABC üçgeni oluşturalım. Daha sonra "Araç Çubuğu" bölümünden "Dik Doğru" kısmına tıklayalım.

ABC üçgeni üzerinde A köşesine ve karşısındaki kenara, B köşesine ve karşısındaki kenara, C köşesine ve karşısındaki kenara tıklayarak üçgenin yüksekliklerini oluşturalım.



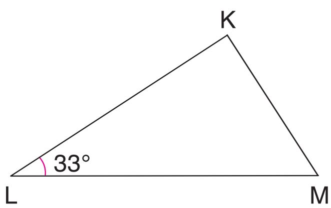
Sonuç olarak dik açılı üçgende yüksekliklerin dik açının olduğu köşede kesiştiği görülmektedir.

Geniş açılı üçgende yüksekliklerin kesiştiği noktanın konumunu inceleyelim. Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayarak grafik penceresinde geniş açılı bir ABC üçgeni oluşturalım. Daha sonra "Araç Çubuğu" bölümünden "Dik Doğru" kısmına tıklayalım. ABC üçgeni üzerinde A köşesine ve karşısındaki kenara, B köşesine ve karşısındaki kenara, C köşesine ve karşısındaki kenara tıklayarak üçgenin yüksekliklerini oluşturalım.



Sonuç olarak geniş açılı üçgende yüksekliklerin dış bölgesinde kesiştiği görülmektedir.

Örnek

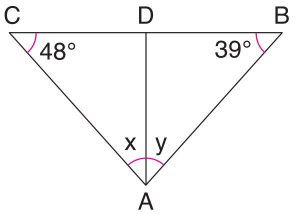


$\widehat{KLM}$ nde K noktası diklik merkezidir. m($\widehat{KLM}$) = 33° olduğuna göre, m($\widehat{KML}$) nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

Dik üçgende diklik merkezi 90° lik açının olduğu köşededir. O hâlde [LK] ⊥ [KM] olur. $\widehat{KLM}$ nde 90° + 33° + m($\widehat{KML}$) = 180° ⇒ m($\widehat{KML}$) = 57° olur.

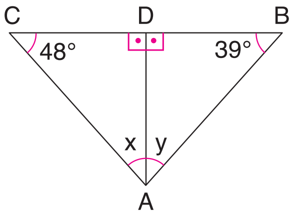
Örnek



$\widehat{ABC}$ nde BC kenarına ait yükseklik [AD] dır.

m($\widehat{ACB}$) = 48°, m($\widehat{ABC}$) = 39° olduğuna göre m($\widehat{CAD}$) = x ve m($\widehat{BAD}$) = y nin kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$\widehat{ABC}$ nde [AD] yükseklik olduğundan [BC] ⊥ [AD] olur.

$\widehat{ADC}$ nde x + 48° + 90° = 180° ⇒ x = 42°,

$\widehat{ABD}$ nde y + 39° + 90° = 180° ⇒ y = 51° bulunur.

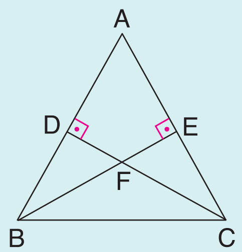
Bilgi Kutusu

$\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgen, |AB| = |AC| olmak üzere F diklik merkezi ise

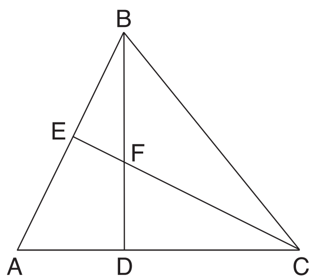
|FB| = |FC|, |FD| = |FE|

|AD| = |AE|, |BD| = |CE| ve

|BE| = |DC| olur.



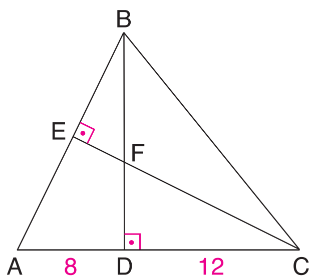
Örnek



$\widehat{BAC}$ nde |AB| = |AC| ve F diklik merkezidir.

|AB| = 20 cm ve |DC| = 12 cm olduğuna göre |BD| nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



F diklik merkezi ise [BD] ⊥ [AC] ve [CE] ⊥ [AB] olur.

|AB| = |AC| = 20 cm olur. |AC| = 20 ⇒ |AD| = 20 – 12 = 8 cm olur.

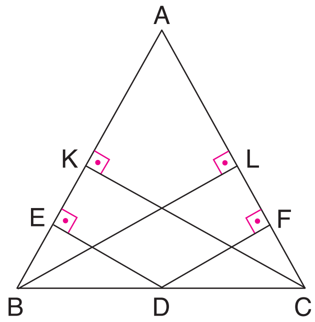
$\widehat{ABD}$ nde Pisagor bağıntısından

$20^2 = 8^2 + |BD|^2 \Rightarrow |BD|^2 = 400 - 64$

$\Rightarrow |BD|^2 = 336$

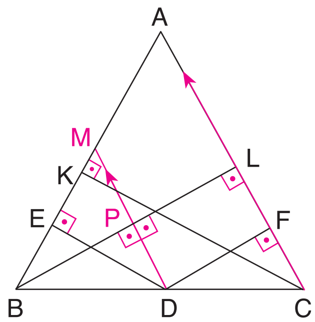
$\Rightarrow |BD| = 4\sqrt{21}$ cm olur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde [CK] ⊥ [AB], [DE] ⊥ [AB], [BL] ⊥ [AC], [DF] ⊥ [AC] ve |AB| = |AC| ise |DE| + |DF| = |CK| = |BL| olduğunu gösterelim.

Çözüm



[DM] ⊥ [BL] çizelim.

O hâlde [DM] // [AC] ve $\widehat{BMD}$ ikizkenar üçgen olur. O hâlde |DE| = |BP| olur.

[BL] // [DF] olduğundan DPLF dikdörtgen olur ve |DF| = |PL| olur. Bu durumda

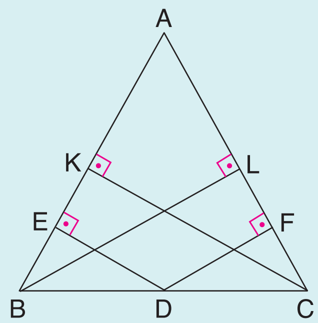
|DE| + |DF| = |BP| + |PL| = |BL| = |CK| olur.

Bilgi Kutusu

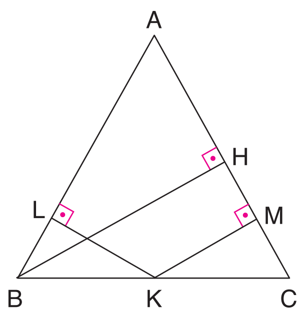
İkizkenar üçgende taban üzerinde alınan herhangi bir noktanın eş olan kenarlara çizilen yüksekliklerin uzunlukları toplamı, üçgenin eş olan kenarlarına ait yüksekliklerin uzunluklarına eşittir.

$\widehat{ABC}$ nde |AB| = |AC| ise

|DE| + |DF| = |CK| = |BL| olur.



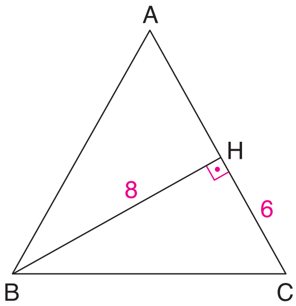
Örnek



ABC nde [KL] ⊥ [AB], [KM] ⊥ [AC], [BH] ⊥ [AC],

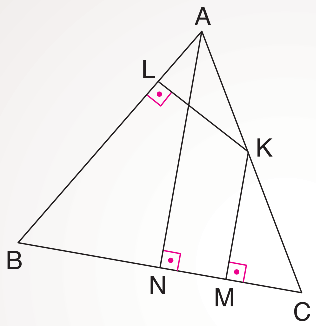
|AB| = |AC|, |KL| = 3 cm, |MK| = 5 cm, |HC| = 6 cm olduğuna göre |BC| nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



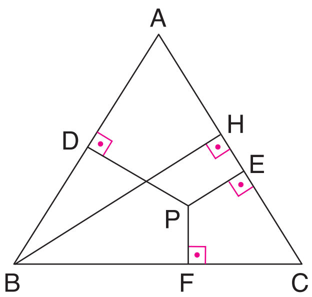
$|AB| = |AC|$ olduğundan
$|MK| + |KL| = |BH|$ olur.
O hâlde $|BH| = 3 + 5 = 8$ cm olur.
$\widehat{BHC}$ nde Pisagor bağıntısından
$|BC|^2 = 8^2 + 6^2$
$|BC|^2 = 100$
$|BC| = 10$ cm bulunur.

Sıra Sizde



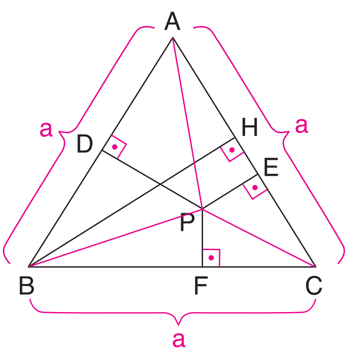
$|AB| = |CB|$, $|KL| = 7$ birim,
$|KM| = 6$ birim
olduğuna göre $|AN|$ kaçtır?

Örnek



ABC eşkenar üçgeninde $[PD] \perp [AB]$, $[PE] \perp [AC]$, $[PF] \perp [BC]$ ve $[BH] \perp [AC]$ olduğuna göre $|PD| + |PE| + |PF| = |BH|$ olduğunu gösterelim.

Çözüm



$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{a \cdot |BH|}{2}$ olur. Aynı zamanda

$$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{ABP}) + A(\widehat{PBC}) + A(\widehat{APC})$$
$$= \frac{a \cdot |PD|}{2} + \frac{a \cdot |PF|}{2} + \frac{a \cdot |PE|}{2}$$
$$= \frac{a}{2}(|PD| + |PF| + |PE|) \text{ olur.}$$

O hâlde

$$\frac{a \cdot |BH|}{2} = \frac{a}{2}(|PD| + |PF| + |PE|) \Rightarrow |BH| = |PD| + |PE| + |PF| \text{ olur.}$$

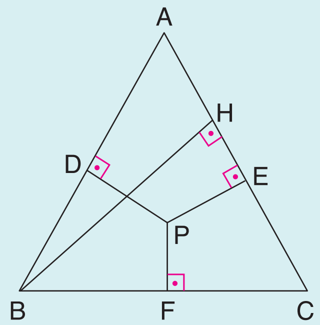
Bilgi Kutusu

Eşkenar üçgen içerisinde alınan bir noktadan kenarlara indirilen dikmelerin uzunlukları toplamı, eşkenar üçgenin yüksekliğine eşittir.

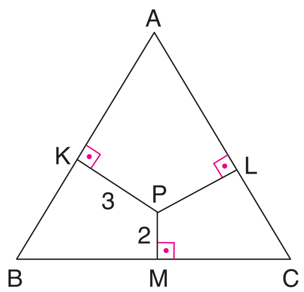
ABC eşkenar üçgeninde,

$|PD| + |PE| + |PF| = |BH|$

olur.



Örnek



ABC eşkenar üçgeninin yüksekliği 9 cm, $|KP| = 3$ cm, $|MP| = 2$ cm olduğuna göre $|PL|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

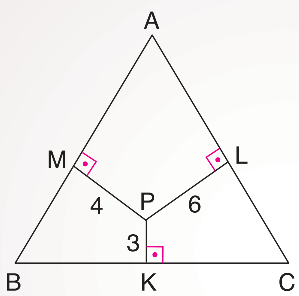
Çözüm

ABC eşkenar üçgeninin yüksekliği h olsun.

$\widehat{ABC}$ eşkenar üçgen olduğundan $|KP| + |MP| + |PL|$ eşkenar üçgenin yüksekliğine eşittir. O hâlde

$$h = |KP| + |MP| + |PL| \Rightarrow 9 = 3 + 2 + |PL|$$
$$\Rightarrow |PL| = 9 - 5$$
$$\Rightarrow |PL| = 4 \text{ cm bulunur.}$$

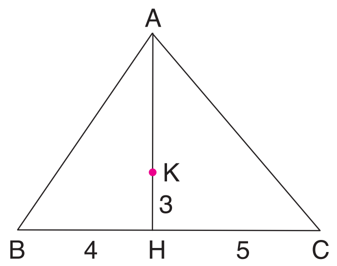
Sıra Sizde



ABC eşkenar üçgendir.

$|MP| = 4$ cm, $|LP| = 6$ cm ve $|KP| = 3$ cm olduğuna göre ABC eşkenar üçgeninin yüksekliği kaç santimetredir?

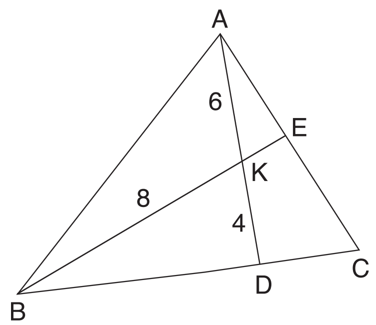
1.



$\widehat{ABC}$ nde K diklik merkezi ve H ∈ [BC] dır.

|KH| = 3 cm, |BH| = 4 cm ve |HC| = 5 cm olduğuna göre |AK| kaç santimetredir?

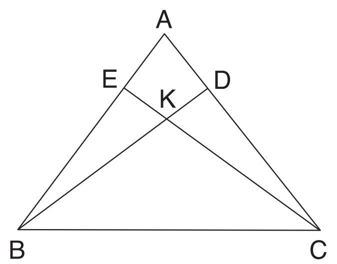
2.



$\widehat{ABC}$ nde K diklik merkezi, E ∈ [AC] ve D ∈ [BC] dır.

|AK| = 6 cm, |KD| = 4 cm ve |BK| = 8 cm olduğuna göre |KE| kaç santimetredir?

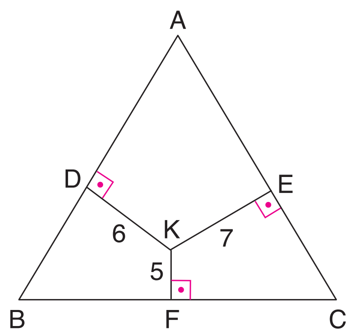
3.



ABC üçgeninde K noktası diklik merkezi, D ∈ [AC] ve E ∈ [AB] dır.

|AB| = |AC|, |DC| = 5 cm ve |AE| = 2 cm olduğuna göre |BD| kaç santimetredir?

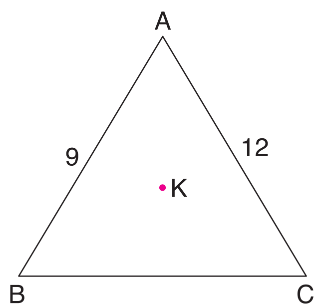
4.



K noktası ABC eşkenar üçgenin iç bölgesinde herhangi bir noktadır.

[KD] ⊥ [AB], [KF] ⊥ [BC], [KE] ⊥ [AC], |DK| = 6 cm,
|EK| = 7 cm, |FK| = 5 cm olduğuna göre $\widehat{ABC}$ nin yüksekliği kaç santimetredir?

5.



K noktası ABC nin diklik merkezidir.

|AB| = 9 cm ve |AC| = 12 cm olduğuna göre |BC| nun santimetre cinsinden alabileceği tam sayı değerleri kaç tanedir?

Sembol ve Gösterimler

sinx

cosx

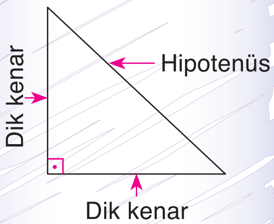
tanx

cotx

9.4.4. DİK ÜÇGEN VE TRİGONOMETRİ

Kenar uzunlukları birer tam sayı ve çevresi 30 m olan dik üçgen şeklindeki bir bahçenin en uzun kenarı boyunca birer metre aralıklarla fidan dikilecektir.

- En uzun kenarın diğer kenarlarla kesiştiği noktalara da fidan dikileceğine göre kaç fidana ihtiyaç vardır?



Bir açısı 90° olan üçgene **dik üçgen** denir. 90° nin karşısındaki kenara hipotenüs, diğer kenarlara **dik kenarlar** denir.

9.4.4.1. Dik Üçgende Pisagor Teoremi

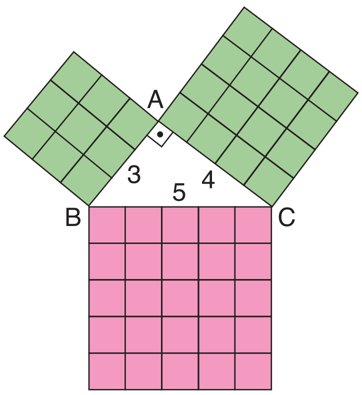
Televizyonlarda ekran boyutu televizyonun köşegeninin uzunluğudur. Televizyonların kenar uzunluklarının oranı geniş ekran televizyonlarda 16:9 dur.

» Ekran boyutu 82 cm olan bir televizyonun görüntü alanının yaklaşık değerini bulunuz.

Örnek

Kenar uzunlukları a = 5 birim, b = 3 birim, c = 4 birim ve $m(\widehat{BAC}) = 90°$ olan $\overset{\triangle}{ABC}$ nin kenarları üzerine kurulan karelerin alanlarını karşılaştıralım.

Çözüm



[BC] üzerine kurulan karenin alanı
$|BC| = 5$ birim olduğundan
$|BC|^2 = 5^2 = 25$ birimkaredir.

[AB] üzerine kurulan karenin alanı
$|AB| = 3$ birim olduğundan
$|AB|^2 = 3^2 = 9$ birimkaredir.

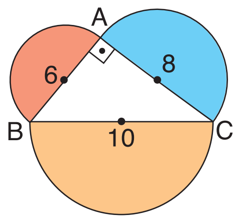
[AC] üzerine kurulan karenin alanı
$|AC| = 4$ birim olduğundan
$|AC|^2 = 4^2 = 16$ birimkaredir.

$\overset{\triangle}{ABC}$ nin dik kenarları üzerine kurulan karelerin alanlarının toplamı, hipotenüsün üzerine kurulu olan karenin alanına eşittir.

Örnek

Kenar uzunlukları a = 10 cm, b = 6 cm, c = 8 cm ve $m(\widehat{BAC}) = 90°$ olan $\widehat{ABC}$ nin kenarlarını çap kabul edecek şekilde kenarların üzerine kurulan yarım dairelerin alanlarını karşılaştıralım.

Çözüm



Kırmızı boyalı yarım dairenin yarıçapının uzunluğu r = 3 cm olup alanı $\pi \cdot 3^2 = 9\pi$ cm^2 dir.

Mavi boyalı yarım dairenin yarıçapının uzunluğu r = 4 cm olup alanı $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$ cm^2 dir.

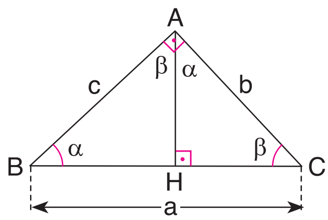
Turuncu boyalı yarım dairenin yarıçapının uzunluğu r = 5 cm olup alanı $\pi \cdot 5^2 = 25\pi$ cm^2 dir.

$\widehat{ABC}$ nin dik kenarları üzerine kurulu olan yarım dairelerin alanlarının toplamı, hipotenüsün üzerine kurulan yarım dairenin alanına eşittir.

Örnek

Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamının, hipotenüsün uzunluğunun karesine eşit olduğunu gösterelim.

Çözüm



A köşesinden karşı kenara dikme indirelim ve bu dikmenin [BC] nı kestiği noktaya H diyelim.

$m(\widehat{ABC}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ACB}) = \beta$ dersek $\alpha + \beta = 90°$ olur.

Bu durumda $\widehat{ABH}$ nde $m(\widehat{BAH}) = \beta$, $\widehat{AHC}$ nde $m(\widehat{HAC}) = \alpha$ olur.

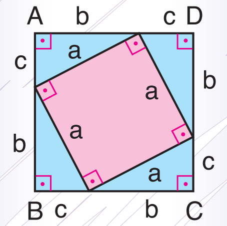
Bu durumda A.A. kuralı gereğince $\widehat{ABH} \sim \widehat{CBA}$ ve $\widehat{AHC} \sim \widehat{BAC}$ dir.

$$\widehat{ABH} \sim \widehat{CBA} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{|BH|}{c} \Rightarrow |BH| = \frac{c^2}{a}$$

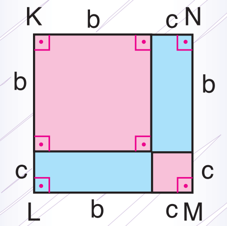
$$\widehat{AHC} \sim \widehat{BAC} \Rightarrow \frac{|HC|}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow |HC| = \frac{b^2}{a} \text{ olur.}$$

$$|BC| = |BH| + |HC| \Rightarrow a = \frac{c^2}{a} + \frac{b^2}{a} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \text{ bulunur.}$$

!



$A(ABCD) = a^2 + 2bc$



$A(KLMN) = b^2 + c^2 - 2bc$

$A(ABCD) = A(KLMN)$

$a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$

$a^2 = b^2 + c^2$

! Pisagor Bağıntısını sağlayan pozitif tam sayı üçlülerine **Pisagor Üçlüleri** denir.

3–4–5

6–8–10

8–15–17

5–12–13

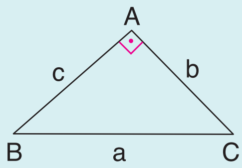
7–24–25

20–21–29

üçlüleri Pisagor Üçlülerine örnektir.

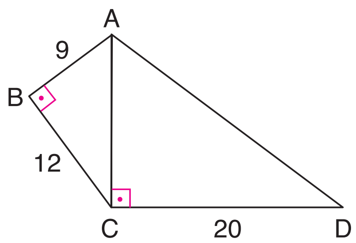
Bilgi Kutusu

Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı, hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir. Bu bağıntıya **Pisagor Bağıntısı** denir.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Örnek



ABC ve ACD üçgenlerinde $[AB] \perp [BC]$, $[AC] \perp [CD]$, $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 12$ cm ve $|CD| = 20$ cm olduğuna göre $|AD|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

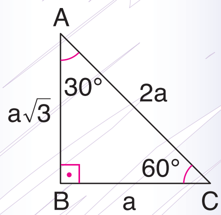
$\widehat{ABC}$ nde Pisagor bağıntısından

$|AC|^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow |AC|^2 = 225 \Rightarrow |AC| = 15$ cm olur.

$\widehat{ACD}$ nde Pisagor Bağıntısından

$|AD|^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow |AD|^2 = 625 \Rightarrow |AD| = 25$ cm olur.

!



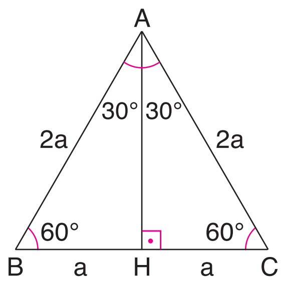
Açı ölçüleri 30°, 60°, 90° olan üçgende

- 30° nin karşısındaki kenarın uzunluğu, hipotenüsün uzunluğunun yarısıdır.
- 60° nin karşısındaki kenarın uzunluğu, 30° nin karşısındaki kenarın uzunluğunun $\sqrt{3}$ katıdır.

Örnek

Bir eşkenar üçgenin yüksekliği ile kenar uzunluğu arasındaki ilişkiyi bulalım.

Çözüm



ABC eşkenar üçgeninin [AH] yüksekliği hem BC kenarına ait kenarortay, hem de $\widehat{BAC}$ nın açıortayıdır.

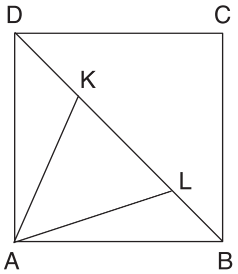
$|BC| = |AB| = |AC| = 2a$ ve

$|BH| = |HC| = a$ olur.

AHC dik üçgeninde

$|AH|^2 + a^2 = (2a)^2 \Rightarrow |AH|^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow |AH| = a\sqrt{3}$ olur.

Örnek

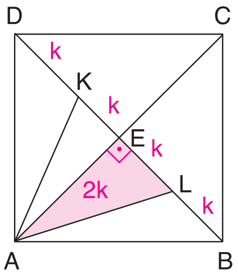


ABCD karesinde [DB] köşegendir.

$|DK| = |LB| = \dfrac{|KL|}{2}$ ve $|AL| = 4\sqrt{5}$ cm

olduğuna göre |AB| nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



Karenin köşegenleri dik kesiştiğinden $[DB] \perp [AC]$ olur.

Köşegenler eşit uzunlukta olup birbirini ortaladığından

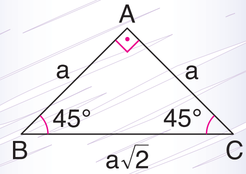
$|DK| = |KE| = |EL| = |LB| = k$, $|AE| = 2k$ olur.

$\widehat{AEL}$ nde

$|AL|^2 = (2k)^2 + k^2 \Rightarrow (4\sqrt{5})^2 = 5k^2 \Rightarrow k = 4$ olur.

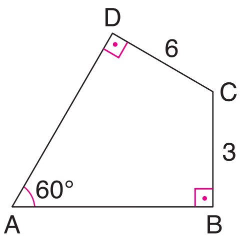
$\widehat{AEB}$ nde $|AB|^2 = (2k)^2 + (2k)^2 \Rightarrow |AB|^2 = 8^2 + 8^2 \Rightarrow |AB| = 8\sqrt{2}$ cm bulunur.

!



İkizkenar dik üçgende hipotenüsün uzunluğu dik kenarlardan birinin uzunluğunun $\sqrt{2}$ katıdır.

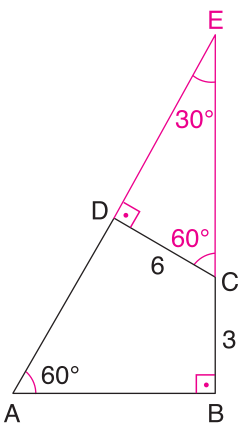
Örnek



ABCD dörtgeninde $[AD] \perp [DC]$, $[CB] \perp [AB]$,

$|DC| = 6$ cm ve $|CB| = 3$ cm olduğuna göre |AB| nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



ABCD dörtgenini üçgene tamamlarsak

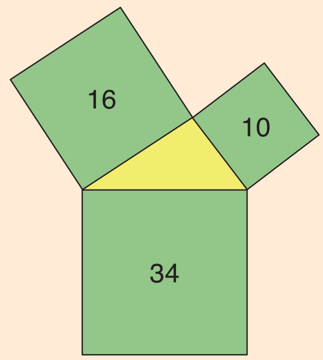
$m(\widehat{AEC}) = 30°$ ve $m(\widehat{ECD}) = 60°$ olur.

$|EC| = 2 \cdot 6 = 12$ cm olur.

$\widehat{AEB}$ nde $|EB| = 12 + 3 = 15$ cm bulunur.

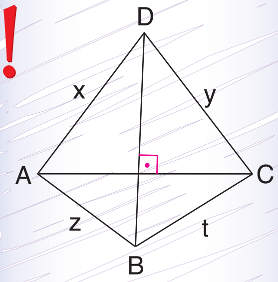
O hâlde $|AB| = \dfrac{15}{\sqrt{3}} = \dfrac{15\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$ cm olur.

KARELERİN ÜÇGENİ

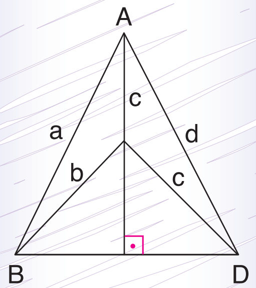


Şekildeki üç karenin alanı 10, 16 ve 34 birimkaredir.

Bu karelerin bir araya gelmesiyle oluşan sarı renkli üçgenin alanını bulunuz.

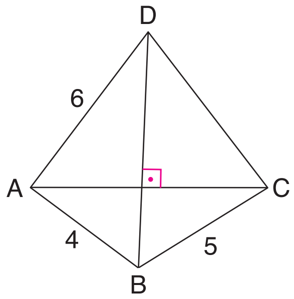


$x^2 + t^2 = z^2 + y^2$



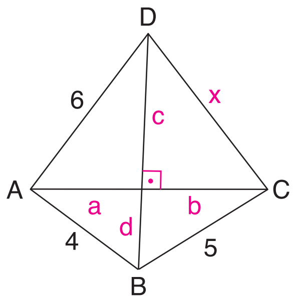
$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

Örnek



ABCD dörtgeninde $[AC] \perp [DB]$, $|AD| = 6$ cm, $|BC| = 5$ cm ve $|AB| = 4$ cm olduğuna göre $|DC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



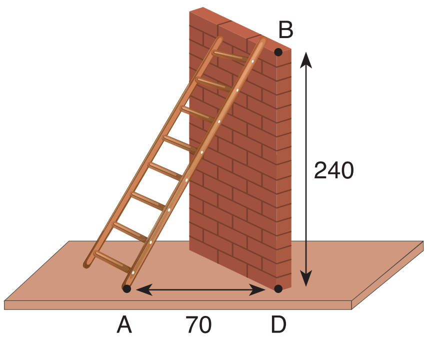
Dörtgenin köşegenlerinin oluşturduğu dik üçgenlere Pisagor Bağıntısını uygulayalım.

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + c^2 = 36 \\ b^2 + d^2 = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 25 + 36$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + d^2 = 16 \\ c^2 + b^2 = x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = x^2 + 16$$

$25 + 36 = x^2 + 16 \Rightarrow x^2 = 45 \Rightarrow x = 3\sqrt{5}$ cm olur.

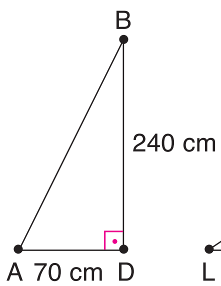
Örnek

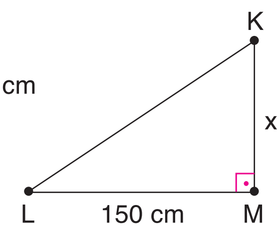


Alt ucunun duvardan uzaklığı 70 cm iken duvara dayanan merdivenin üst ucunun yerden yüksekliği 240 cm oluyor.

Merdivenin alt ucunun duvardan uzaklığı 150 cm olduğunda üst ucunun yerden yüksekliğinin kaç santimetre olacağını bulalım.

Çözüm





Problemi yandaki gibi modellersek merdivenin uzunluğu $\widehat{ABD}$ nden

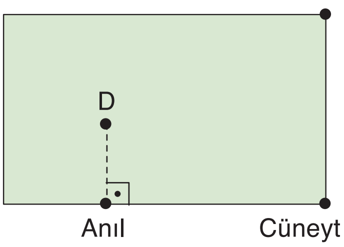
$|AB|^2 = 70^2 + 240^2$

$|AB|^2 = 62\,500$

$|AB| = 250$ cm olur.

$\widehat{KLM}$ nden $x^2 = 250^2 - 150^2 \Rightarrow x^2 = 40\,000 \Rightarrow x = 200$ cm bulunur.

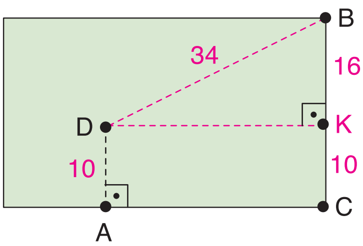
Örnek



Anıl, Berk ve Cüneyt dikdörtgen şeklindeki bir parkın kenarları üzerindeki noktalarda duruyorlar. Anıl önce parkın kısa kenarına paralel olacak şekilde 10 m yukarı doğru yürüyerek D noktasına, D noktasından 34 m doğrusal şekilde en kısa yoldan yürüyerek Berk'in yanına ulaşıyor.

Berk ile Cüneyt'in arasında 26 m uzaklık olduğuna göre başlangıçta Anıl ile Cüneyt arasındaki uzaklığın kaç metre olduğunu bulalım.

Çözüm

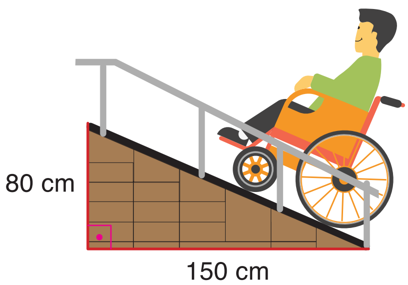


$|BC| = 26$ m,

$|KC| = 10$ m $\Rightarrow |BK| = 16$ m olur.

$\widehat{BDK}$ nde $34^2 = 16^2 + |DK|^2 \Rightarrow |DK|^2 = 900 \Rightarrow |DK| = 30$ m olur.

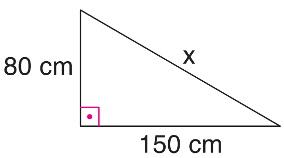
Örnek



Bir firma engelli çalışanları için iş yerinin girişine rampa yaptırmıştır.

Rampanın yüksekliği 80 cm ve genişliği 150 cm olduğuna göre rampanın uzunluğunun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



Verilenleri yandaki gibi modellersek

$x^2 = 80^2 + 150^2$

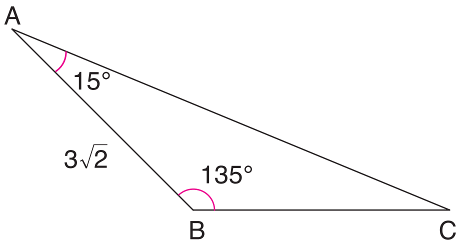
$x^2 = 28\,900 \Rightarrow x = 170$ cm bulunur.

Pythagoras (Pisagor) (MÖ 570-MÖ 495)

Pythagoras İyonyalı filozof ve matematikçidir. Thales'in öğrencisi olmuştur. Sayıların babası olarak bilinir. Geometride aksiyomları ve postulatları kullanarak birçok sonuç elde edilebileceğini vurgulamıştır. Matematiğe aksiyomatik düşünceyi ve ispat fikrini getirmiştir. Doğadaki her şeyin matematiksel olarak açıklanmasının ve yorumlanmasının mümkün olduğunu ileri sürmüştür. Pisagor Teoremi matematikteki en büyük buluşlardan biridir. Pisagor Teoremi rasyonel sayılarla ölçülemeyen uzunlukların da var olduğunu gösterir.

Pisagor'un doğduğu yer olarak bilinen Sisam Adası'nda anıtı bulunmaktadır.

1.

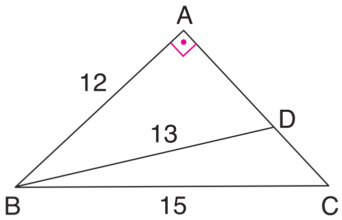


ABC üçgeninde

$m(\widehat{ABC}) = 135°$, $m(\widehat{BAC}) = 15°$ ve $|AB| = 3\sqrt{2}$ cm

olduğuna göre $|AC|$ kaç santimetredir?

2.



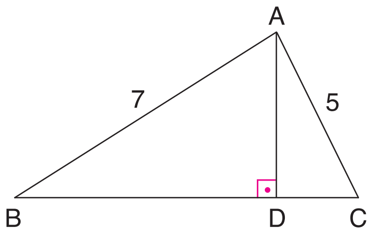
$\widehat{ABC}$ nde $[BA] \perp [AC]$, $D \in [AC]$,

$|AB| = 12$ cm, $|BD| = 13$ cm ve $|BC| = 15$ cm

olduğuna göre $|DC|$ kaç santimetredir?

3. Bir $\widehat{ABC}$ nde $[BA] \perp [AC]$, $m(\widehat{ACB}) > m(\widehat{ABC})$, $|BC| = 17$ cm ve $\widehat{ABC}$ nin çevresi 40 cm olduğuna göre $|AB|$ kaç santimetredir?

4.

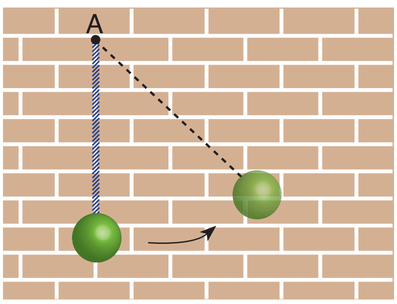


$\widehat{ABC}$ nde $[AD] \perp [BC]$,

$|AB| = 7$ cm, $|AC| = 5$ cm ve $|BC| = 6$ cm

olduğuna göre $|AD|$ kaç santimetredir?

5.



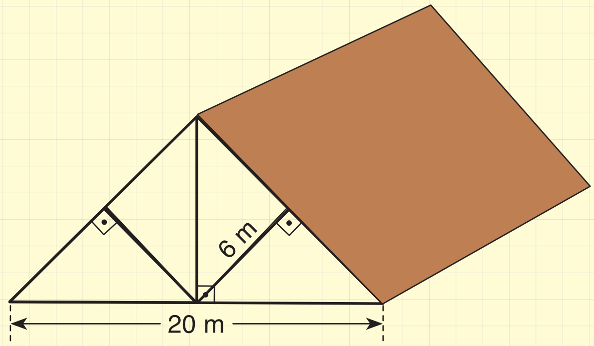
Yerden yüksekliği 6 m olan bir A noktasına ucunda top asılı olan bir ip düşey bir şekilde sabitleniyor. Topun üst kısmının yerden yüksekliği 1 m iken Serhat bu topa vurduğunda top yatayda 3 m yol alıyor.

Bu durumdayken topun üst kısmının yerden yüksekliği kaç metre olur?

6. Aynı noktadaki iki arabadan biri önce 24 km batıya, sonra 18 km güneye; diğeri önce 30 km kuzeye, sonra 16 km doğuya gitmiştir.

İki arabanın başlangıç noktalarına olan en yakın uzaklıkları arasındaki fark kaç kilometredir?

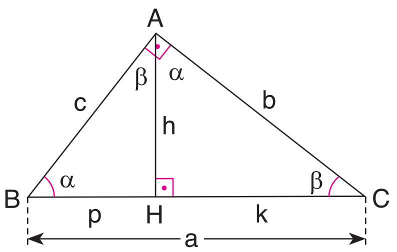
9.4.4.2. Öklid Teoremi



İkizkenar üçgen prizma şeklindeki çatıda, tepeden tabana inilen dikme ayağından yan yüzeylere dik olacak şekilde 6 metre uzunluğunda destekler konmuştur. Çatının genişliği 20 metredir.

» Çatının ikizkenar üçgen biçimindeki görünen kısmında oluşan dik üçgenlerden yararlanarak çatının tepesinden tabanına inilen dikme ayağının uzunluğunu hesaplayınız.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $[BA] \perp [AC]$ ve $[AH] \perp [BC]$ olduğuna göre aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $c^2 = p \cdot a$ **b)** $b^2 = k \cdot a$ **c)** $h^2 = p \cdot k$

Çözüm

a) A.A. kuralı gereğince $\widehat{ABC} \sim \widehat{HBA}$ dir.

Buradan $\dfrac{|AB|}{|HB|} = \dfrac{|BC|}{|BA|} \Rightarrow \dfrac{c}{p} = \dfrac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot p$ bulunur.

b) A.A. kuralı gereğince $\widehat{ABC} \sim \widehat{HAC}$ dir.

Buradan $\dfrac{|AC|}{|HC|} = \dfrac{|BC|}{|AC|} \Rightarrow \dfrac{b}{k} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot k$ bulunur.

c) A.A. kuralı gereğince $\widehat{ABH} \sim \widehat{CAH}$ dir.

Buradan $\dfrac{|BH|}{|AH|} = \dfrac{|AH|}{|CH|} \Rightarrow \dfrac{p}{h} = \dfrac{h}{k} \Rightarrow h^2 = p \cdot k$ bulunur.

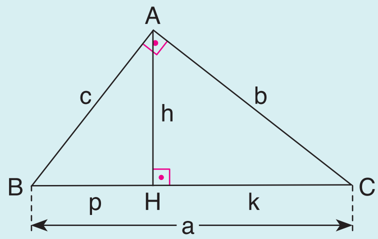
Euclid
(Öklid)
(MÖ 330-MÖ 275)

Adı geometriyle en çok özdeşleştirilen İskenderiyeli matematikçidir. Geometrinin başlangıcından kendi zamanına kadar bilinenleri ve kendi çalışmalarını "Elementler" adlı kitabında toplamıştır. Yaptığı çalışmaları ispatlayarak mantıksal bir dizgeye oturtmuştur. Bugün geometri alanında ortaya atılan teoremlerin birçoğu onun postulatları üzerine kuruludur.

Bilgi Kutusu

Bir dik üçgende hipotenüse ait yüksekliğin karesi, bu yüksekliğin hipotenüs üzerinde ayırdığı parçaların uzunluklarının çarpımına eşittir.

Bir dik üçgende bir dik kenarın uzunluğunun karesi, hipotenüse ait yüksekliğin hipotenüs üzerinde ayırdığı parçalardan kendi tarafında olanın uzunluğu ile hipotenüs uzunluğunun çarpımına eşittir.

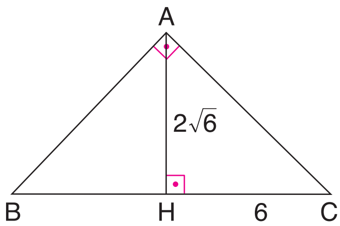


$h^2 = p \cdot k$

$c^2 = p \cdot a$

$b^2 = k \cdot a$

Örnek

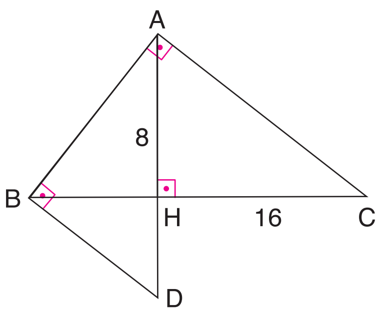


ABC üçgeninde $[BA] \perp [AC]$, $[AH] \perp [BC]$, $|AH| = 2\sqrt{6}$ cm ve $|HC| = 6$ cm olduğuna göre $|AB|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

Öklid bağıntısından $(2\sqrt{6})^2 = |BH| \cdot 6 \Rightarrow 24 = 6|BH| \Rightarrow |BH| = 4$ cm ve $|AB|^2 = |BH| \cdot |BC| \Rightarrow |AB|^2 = 4 \cdot 10 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$ cm bulunur.

Örnek



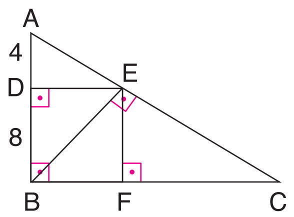
ABC ve ABD birer üçgen, $[AB] \perp [BD]$, $[BA] \perp [AC]$ ve $[AH] \perp [BC]$, $|AH| = 8$ cm ve $|HC| = 16$ cm olduğuna göre $|BD|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABC}$ nde Öklid bağıntısından $8^2 = |BH| \cdot 16 \Rightarrow |BH| = 4$ cm olur.

$\widehat{ABD}$ nde Öklid bağıntısından $4^2 = 8 \cdot |HD| \Rightarrow |HD| = 2$ cm ve $|BD|^2 = 2 \cdot 10 \Rightarrow |BD| = 2\sqrt{5}$ cm bulunur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [BC]$, $[BE] \perp [AC]$, $[EF] \perp [BC]$, $[ED] \perp [AB]$, $|AD| = 4$ cm ve $|DB| = 8$ cm olduğuna göre $|BC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

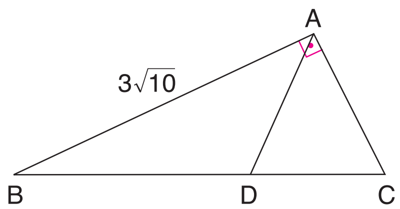
$\widehat{AEB}$ nde $|ED|^2 = 4 \cdot 8 \Rightarrow |ED| = 4\sqrt{2}$ cm olur.

$|BF| = |ED| = 4\sqrt{2}$ cm ve $|DB| = |EF| = 8$ cm olur.

$\widehat{EBC}$ nde $|EF|^2 = |BF| \cdot |FC| \Rightarrow 8^2 = 4\sqrt{2} \cdot |FC| \Rightarrow |FC| = 8\sqrt{2}$ cm olur.

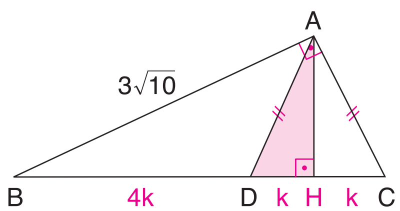
O hâlde $|BC| = |BF| + |FC| = 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ cm bulunur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $[BA] \perp [AC]$, $|BD| = 2|DC|$, $|AD| = |AC|$ ve $|AB| = 3\sqrt{10}$ cm olduğuna göre $|AD|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



$\widehat{ABC}$ nde $[AH] \perp [BC]$ çizelim.

$\widehat{ADC}$ ikizkenar üçgen olduğu için $[AH]$ kenarortaydır ve $|DH| = |HC|$ olur.

$|DH| = |HC| = k$ dersek $|BD| = 2|DC| = 4k$ olur.

$\widehat{ABC}$ nde Öklid bağıntısından

$(3\sqrt{10})^2 = 5k \cdot 6k \Rightarrow 30k^2 = 90 \Rightarrow k^2 = 3 \Rightarrow k = \sqrt{3}$ bulunur.

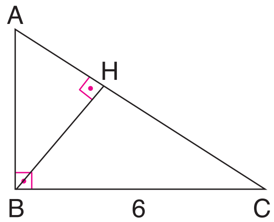
$|AH|^2 = |BH| \cdot |HC| \Rightarrow |AH|^2 = 5k \cdot k \Rightarrow |AH|^2 = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

$\Rightarrow |AH| = \sqrt{15}$ cm olur.

$\widehat{ADH}$ nde Pisagor bağıntısından

$|AD|^2 = (\sqrt{15})^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow |AD|^2 = 18 \Rightarrow |AD| = 3\sqrt{2}$ cm olur.

Örnek

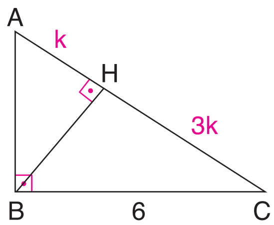


$\widehat{ABC}$ nde [AB] ⊥ [BC], [BH] ⊥ [AC],

$|AC| = 4 \cdot |AH|$ ve $|BC| = 6$ cm

olduğuna göre |AB| nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



$|AH| = k$ dersek $|HC| = 3k$ olur.

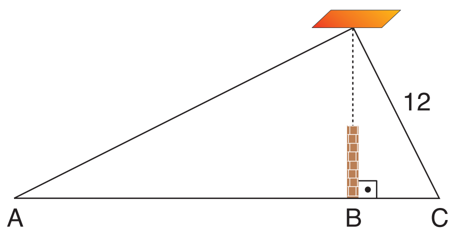
$6^2 = 3k \cdot 4k \Rightarrow k = \sqrt{3}$ cm ve

$|AB|^2 = k \cdot 4k$

$|AB|^2 = \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}$

$|AB| = 2\sqrt{3}$ cm bulunur.

Örnek

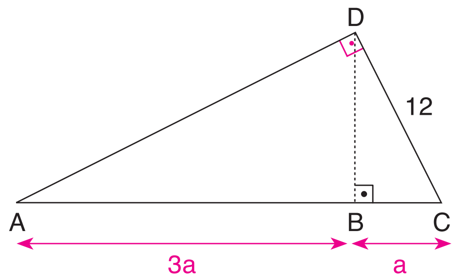


C noktasında bulunan bir market müdürü duvarın arkasında kalan A noktasındaki kasap reyonunu görebilmek için tavana şekildeki gibi ayna yerleştirmiştir. Aynaya gelen ışınlar arasında 90° lik açı oluşmaktadır.

C noktasının aynaya olan uzaklığı 12 metre ve $|AC| = 4|BC|$ ise reyonu ile C noktası arasındaki uzaklığın kaç metre olduğunu bulalım.

Çözüm

Problemi aşağıdaki gibi modelleyelim.

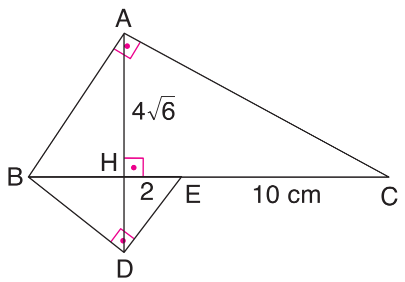


$\widehat{DAC}$ nde Öklid bağıntısından

$12^2 = a \cdot 4a \Rightarrow 144 = 4a^2 \Rightarrow 36 = a^2 \Rightarrow a = 6$ m bulunur.

$|AC| = 4a = 4 \cdot 6 = 24$ m bulunur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{BDE}$ nde $[BA] \perp [AC]$, $[BD] \perp [DE]$, $[AD] \perp [BC]$, $|EC| = 10$ cm, $|AH| = 4\sqrt{6}$ cm ve $|HE| = 2$ cm olduğuna göre $|DH|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABC}$ nde $|BH| = x$ cm olsun.

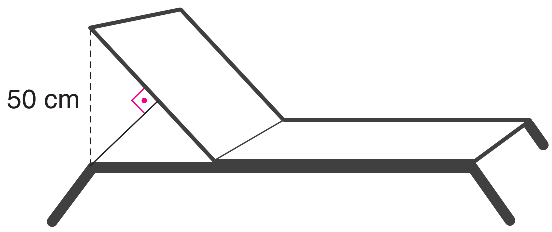
Öklid bağıntısından

$|AH|^2 = |BH| \cdot |HC| \Rightarrow (4\sqrt{6})^2 = x \cdot 12 \Rightarrow 96 = x \cdot 12 \Rightarrow x = 8$ bulunur.

$\widehat{BDE}$ nde Öklid bağıntısından

$|DH|^2 = |BH| \cdot |HE| \Rightarrow |DH|^2 = 8 \cdot 2 \Rightarrow |DH| = 4$ cm olur.

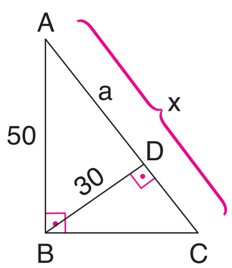
Örnek



Bir şezlongun sırt yaslanan kısmı şekildeki gibi bir destekle kaldırılıyor. 30 cm uzunluğundaki bu destekle şezlongun arkası arasında 90° lik bir açı oluşuyor.

Şezlongun arkasının en üst noktası ile şezlongun ayakları arasındaki en kısa uzaklık 50 cm olduğuna göre şezlongun sırt yaslanan kısmının kaç santimetre uzunluğunda olduğunu bulalım.

Çözüm



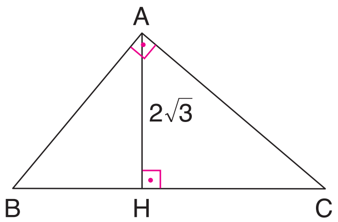
Verilenleri yandaki gibi modellersek

$\widehat{ABD}$ nde $a^2 = 50^2 - 30^2 \Rightarrow a = 40$ cm bulunur.

$\widehat{ABC}$ nde Öklid Bağıntısından

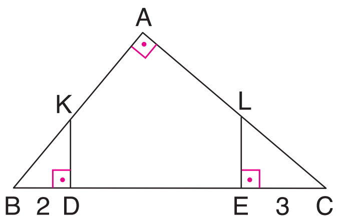
$50^2 = 40 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{125}{2} = 62,5$ cm bulunur.

1.



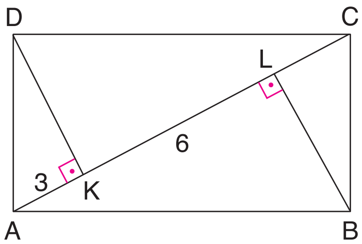
$\widehat{ABC}$ nde $[BA] \perp [AC]$, $[AH] \perp [BC]$, $|AH| = 2\sqrt{3}$ cm, $|HC| - |BH| = 1$ cm olduğuna göre $|AB|$ kaç santimetredir?

2.



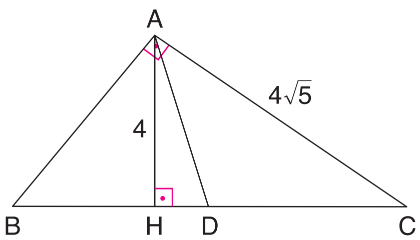
$\widehat{ABC}$ nde $[BA] \perp [AC]$, $[KD] \perp [BC]$, $[LE] \perp [BC]$, $|AB| = 3 \cdot |KB|$, $|AC| = 3 \cdot |LC|$, $|BD| = 2$ cm ve $|EC| = 3$ cm olduğuna göre $|AB|$ kaç santimetredir?

3.



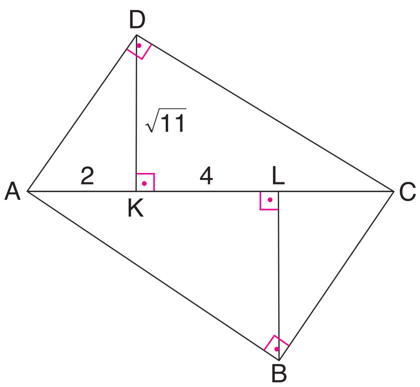
ABCD dikdörtgeninde $[DK] \perp [AC]$, $[BL] \perp [AC]$, $|AK| = 3$ cm ve $|KL| = 6$ cm olduğuna göre $|BC|$ kaç santimetredir?

4.



$\widehat{ABC}$ nde $[BA] \perp [AC]$, $[AH] \perp [BC]$, $|BD| = |DC|$, $|AH| = 4$ cm ve $|AC| = 4\sqrt{5}$ cm olduğuna göre $|AD|$ kaç santimetredir?

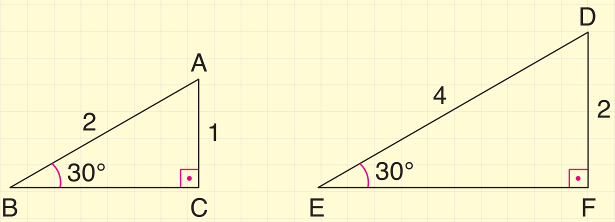
5.



ABC ve ADC üçgenlerinde $[AD] \perp [DC]$, $[AB] \perp [BC]$, $[DK] \perp [AC]$, $[BL] \perp [AC]$,

$|DK| = \sqrt{11}$ cm, $|AK| = 2$ cm ve $|KL| = 4$ cm olduğuna göre $|LB|$ kaç santimetredir?

9.4.4.3. Dik Üçgende Dar Açıların Trigonometrik Oranları



Şekildeki $\overset{\frown}{ABC}$ ve $\overset{\frown}{DEF}$ nin karşılıklı açıları eş olduğundan A.A. benzerlik kuralı gereğince $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$ dir.

Buradan $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} \Rightarrow \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|DE|}{|DF|} \Rightarrow \dfrac{2}{1} = \dfrac{4}{2}$ olur.

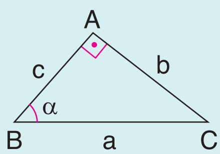
» Bu üçgenlerin kenarları arasındaki oranın değişmemesini nasıl açıklarsınız?

Bilgi Kutusu

Bir dik üçgenin kenarları arasındaki oran ile bu üçgenle eşit açılara sahip olan başka bir dik üçgenin kenarları arasındaki oranlar aynıdır.

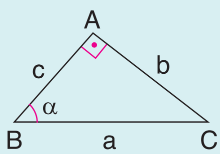
Bilgi Kutusu

❖ Bir dik üçgende bir dar açının karşısında bulunan dik kenarın uzunluğunun hipotenüsün uzunluğuna oranına o **açının sinüsü** denir.



$$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Hipotenüs Uzunluğu}} = \frac{b}{a}$$

❖ Bir dik üçgende bir dar açıya komşu olan dik kenarın uzunluğunun hipotenüsün uzunluğuna oranına o **açının kosinüsü** denir.

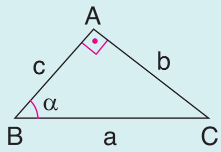


$$\cos\alpha = \frac{\text{Komşu Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Hipotenüs Uzunluğu}} = \frac{c}{a}$$

! $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

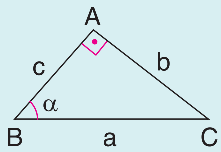
Bilgi Kutusu

- Bir dik üçgende bir dar açının karşısında bulunan dik kenarın uzunluğunun açıya komşu olan dik kenarın uzunluğuna oranına o **açının tanjantı** denir.



$$\tan\alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Komşu Dik Kenar Uzunluğu}} = \frac{b}{c}$$

- Bir dik üçgende bir dar açıya komşu olan dik kenarın uzunluğunun açının karşısında bulunan dik kenarın uzunluğuna oranına o **açının kotanjantı** denir.



$$\cot\alpha = \frac{\text{Komşu Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}} = \frac{c}{b}$$

Örnek

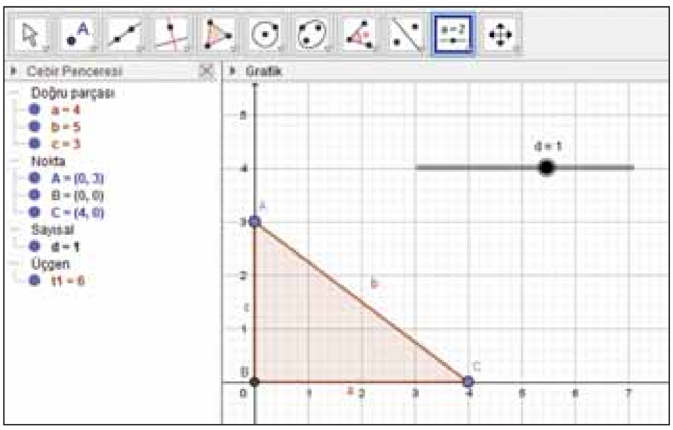
Kenarları belirli bir oranda büyütülen dik üçgenlerde trigonometrik değerlerin değişmediğini dinamik matematik programı yardımıyla inceleyelim.

Çözüm

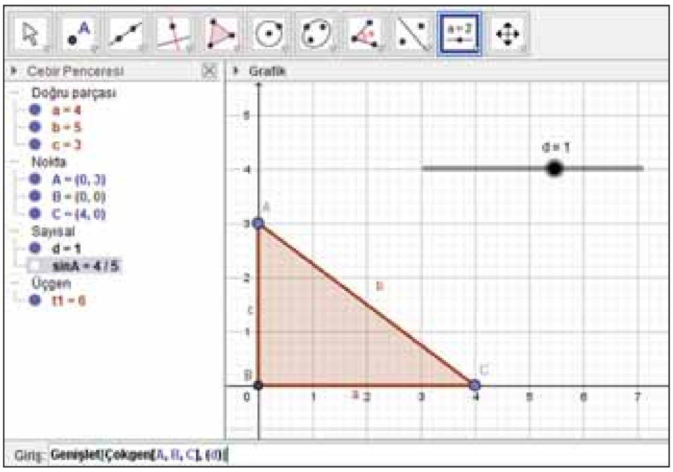
Dinamik matematik programlarından GeoGebra programını kullanalım. Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayalım.

Ardından grafik penceresinde dik köşesi orijin ve dik kenarları eksenler üzerinde olan bir ABC dik üçgeni oluşturalım.

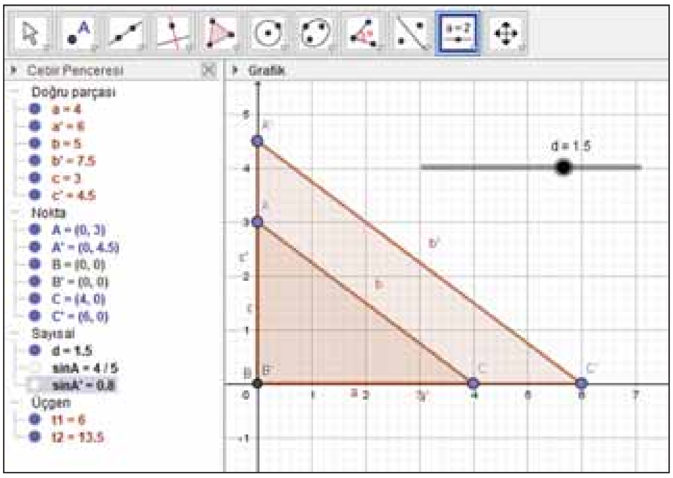
Daha sonra "Araç Çubuğu" bölümünden "Sürgü" kısmına tıklayalım. Buradan bir d sürgüsü oluşturalım.



Programın sol altındaki "Giriş" kısmına sinA = a/b yazarak A açısının sinüs değerini cebir penceresinde görelim. Daha sonra tekrar "Giriş" kısmına "Genişlet [Çokgen[A,B,C], (d)]" yazalım.



Grafik penceresindeki d sürgüsünü sağa doğru d = 1,5 olacak şekilde sürükleyelim. "Giriş" kısmına $sinA^{I} = a^{I}/b^{I}$ yazarak A^{I} açısının sinüs değerini cebir penceresinde görelim. A açısı ile A^{I} açısının sinüs değerlerinin aynı olduğuna dikkat edelim.

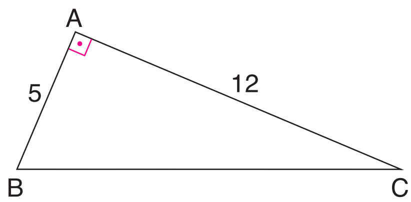


Sonuç olarak üçgenlerin karşılıklı kenarlarının uzunlukları oranı değişmediğinde, açılarının sinüs değerleri aynı kalmaktadır.

Sıra Sizde

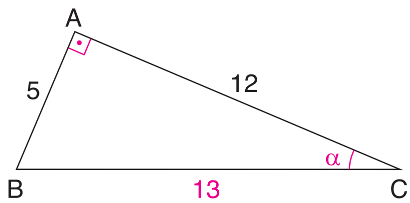
Üçgenlerin karşılıklı kenarlarının uzunlukları oranı değişmediğinde, açılarınn kosinüs, tanjant ve kotanjant değerlerinin de aynı kaldığını GeoGebra programı yardımıyla gösterip sununuz.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $[BA] \perp [AC]$,
$|AB| = 5$ cm ve $|AC| = 12$ cm
olduğuna göre $\widehat{ACB}$ nın trigonometrik değerlerini yazalım.

Çözüm



$|BC|^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow |BC| = 13$
olur.
$m(\widehat{ACB}) = \alpha$ olsun.

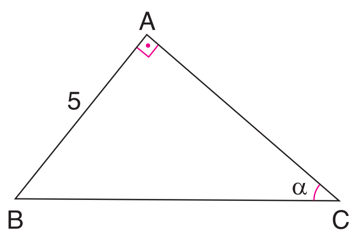
$$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenarın Uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün Uzunluğu}} = \frac{5}{13},$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Komşu Dik Kenarın Uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün Uzunluğu}} = \frac{12}{13},$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenarın Uzunluğu}}{\text{Komşu Dik Kenarın Uzunluğu}} = \frac{5}{12},$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Komşu Dik Kenarın Uzunluğu}}{\text{Karşı Dik Kenarın Uzunluğu}} = \frac{12}{5} \text{ bulunur.}$$

Örnek

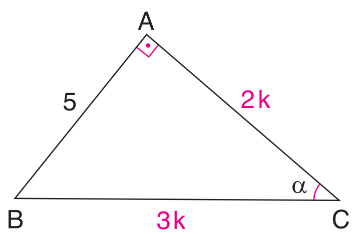


$\widehat{ABC}$ nde $[BA] \perp [AC]$, $m(\widehat{ACB}) = \alpha$,

$\cos\alpha = \frac{2}{3}$ ve $|BC| = 5$ cm

olduğuna göre $|AC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{2}{3}$ olduğundan

$|AC| = 2k$ ve $|BC| = 3k$ olur.

$(3k)^2 = 5^2 + (2k)^2 \Rightarrow 9k^2 - 4k^2 = 25$

$\Rightarrow 5k^2 = 25$

$\Rightarrow k = \sqrt{5}$ olur.

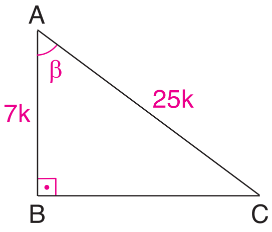
Buradan $|AC| = 2k = 2\sqrt{5}$ cm bulunur.

Örnek

Bir dik üçgenin dar açılarından birinin ölçüsü β olmak üzere

$\cos\beta = \dfrac{7}{25}$ oldığuna göre $\tan\beta$ değerini bulalım.

Çözüm



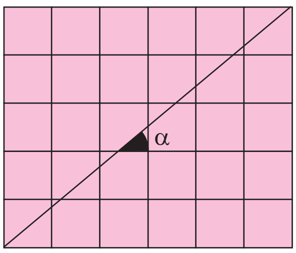
$\widehat{ABC}$ nde $\cos\beta = \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{7}{25}$ olduğundan

$|AB| = 7k$, $|AC| = 25k$ olur.

$|BC|^2 = (25k)^2 - (7k)^2 \Rightarrow |BC| = 24k$ olur.

O hâlde $\tan\beta = \dfrac{24k}{7k} = \dfrac{24}{7}$ bulunur.

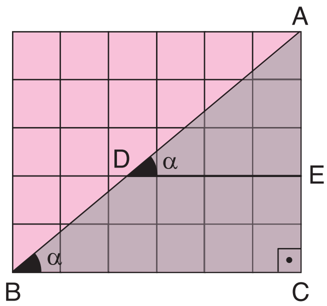
Örnek



Yandaki şekil eş birim karelerden oluşmuştur.

Buna göre $\tan\alpha$ kaçtır? Bulalım.

Çözüm



Şekilde $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ABC})$ olur.

$\widehat{ABC}$ nde $\tan\alpha = \dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{5}{6}$ bulunur.

Sıra Sizde

Bir dik üçgende dar açılardan birinin ölçüsü α, diğerinin ölçüsü β ve $\tan\alpha = \dfrac{5}{6}$ olduğuna göre $\cos\beta$ kaçtır?

Tümler açılardan birinin sinüsü diğerinin kosinüsüne, birinin tanjantı diğerinin kotanjantına eşittir.

$a + b = 90°$ ise

$\sin a = \cos b$

$\cos a = \sin b$

$\tan a = \cot b$

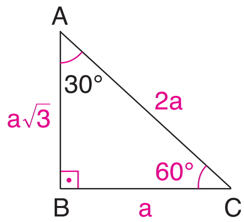
$\cot a = \tan b$ olur.

Örnek

Bir $\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [BC]$ ve $m(\widehat{BAC}) = 30°$ dir.

$\widehat{BAC}$ ve $\widehat{ACB}$ nın trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözüm



$m(\widehat{BCA}) = 180° - (30° + 90°) = 60°$ olur.

$|BC| = a$ birim, $|AC| = 2a$ birim ve

$|AB| = a\sqrt{3}$ birimdir.

(30° – 60° – 90° üçgeni)

$$\sin 30° = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30° = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30° = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cot 30° = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3},$$

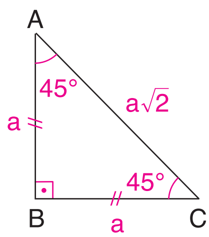
$$\sin 60° = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60° = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\tan 60° = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}, \quad \cot 60° = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ olur.}$$

Örnek

Bir $\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [BC]$ ve $|AB| = |BC|$ olduğuna göre $\widehat{BAC}$ nın trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözüm



$\widehat{ABC}$ ikizkenar dik üçgen olduğundan

$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB}) = 45°$ olur.

$|AB| = |BC| = a$ birim,

$|AC| = a\sqrt{2}$ birimdir. (45° – 45° – 90° üçgeni)

$$\sin 45° = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45° = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan 45° = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{a} = 1, \quad \cot 45° = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{a}{a} = 1 \text{ olur.}$$

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Örnek

$\dfrac{\sin 30° + \tan 60°}{\cot 45° - \cos 30°}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

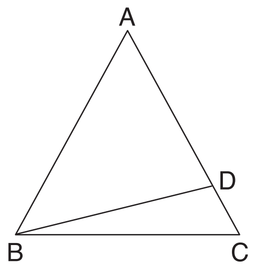
$\sin 30° = \dfrac{1}{2}$, $\tan 60° = \sqrt{3}$, $\cot 45° = 1$ ve $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

$$\dfrac{\sin 30° + \tan 60°}{\cot 45° - \cos 30°} = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \sqrt{3}}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\dfrac{1 + 2\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{2 - \sqrt{3}}{2}}$$

$$= \underset{(2+\sqrt{3})}{\dfrac{1 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} = \dfrac{(1 + 2\sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})}{2^2 - (\sqrt{3})^2}$$

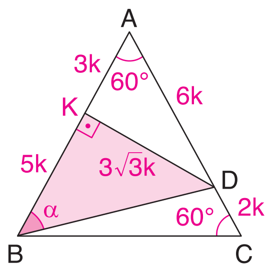
$$= \dfrac{2 + \sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 6}{4 - 3} = 8 + 5\sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek



ABC eşkenar üçgeninde $|AC| = 4|DC|$ olduğuna göre $\cot(\widehat{ABD})$ nin değerini bulalım.

Çözüm



$m(\widehat{ABD}) = \alpha$ olsun. $[DK] \perp [AB]$ çizerek KBD dik üçgenini oluşturalım.

$|AC| = 4|DC|$ olduğundan

$|DC| = 2k$ birim ise $|AD| = 6k$ birimdir.

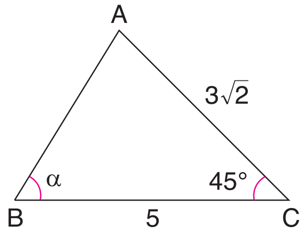
$\widehat{AKD}$ nde $\sin 60° = \dfrac{|DK|}{|AD|} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{|DK|}{6k} \Rightarrow |DK| = 3\sqrt{3}k$ birim,

$\cos 60° = \dfrac{|AK|}{|AD|} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{|AK|}{6k} \Rightarrow |AK| = 3k$ birim olur.

$|AB| = 8k$ birim $\Rightarrow |KB| = 5k$ birimdir.

$\widehat{KBD}$ nde $\cot\alpha = \dfrac{5k}{3\sqrt{3}k} = \dfrac{5}{3\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ bulunur.

Örnek

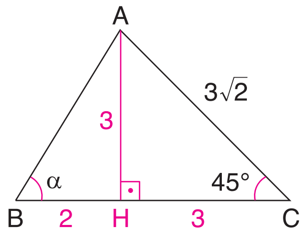


$\overset{\frown}{ABC}$ nde $m(\overset{\frown}{ACB}) = 45°$, $m(\overset{\frown}{ABC}) = \alpha$,

$|AC| = 3\sqrt{2}$ cm ve $|BC| = 5$ cm

olduğuna göre $\tan\alpha$ kaçtır? Bulalım.

Çözüm



$[AH] \perp [BC]$ çizersek

$$\sin 45° = \frac{|AH|}{|AC|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|AH|}{3\sqrt{2}}$$

$|AH| = 3$ cm bulunur.

AHC ikizkenar üçgen olduğundan

$|HC| = |AH| = 3$ cm olur.

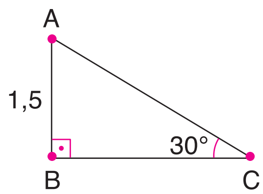
$|BC| = 5 \text{ cm} \Rightarrow |BH| = 2$ cm olur. $\overset{\frown}{ABH}$ nde $\tan\alpha = \dfrac{|AH|}{|BH|} = \dfrac{3}{2}$ bulunur.

Örnek

Yerden yüksekliği 1,5 metre olan bir ağaç eve çıkmak için kullanılan merdiven zeminle 30° lik açı yapmaktadır.

Buna göre merdivenin uzunluğunun kaç metre olduğunu bulalım.

Çözüm



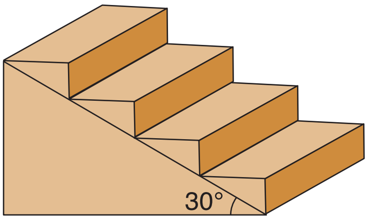
Problemi yandaki gibi modelleyelim.

$\overset{\frown}{ABC}$ nde

$$\sin 30° = \frac{|AB|}{|AC|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1,5}{|AC|} \Rightarrow |AC| = 3 \text{ m}$$

olur

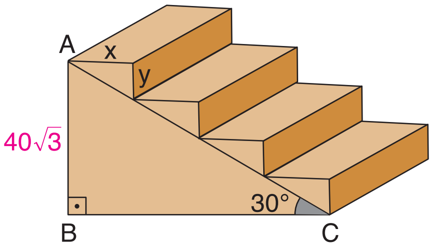
Örnek



Bir binanın girişinde bulunan dört basamaklı bir merdivenin basamak yükseklikleri ve enleri eşittir. Bu merdivenin yerden yüksekliği $40\sqrt{3}$ cm ve merdivenin zeminle yaptığı açının ölçüsü 30° dir.

Buna göre bir basamağın yüksekliğinin ve eninin kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



$$\tan 30° = \frac{|AB|}{|BC|}$$

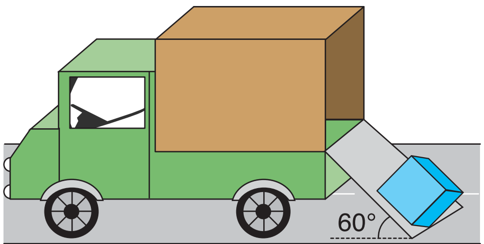
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{40\sqrt{3}}{|BC|}$$

$|BC| = 120$ cm olur.

Bir basamağın eni x cm, yüksekliği y cm olsun.

$4x = 120$ cm $\Rightarrow x = 30$ cm ve $4y = 40\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow y = 10\sqrt{3}$ cm bulunur.

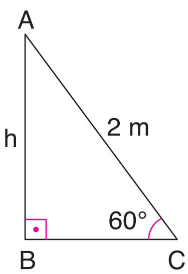
Örnek



Kamyonun kasasına yük çıkarmak için bir rampadan yararlanılacaktır. Rampanın boyu 2 m ve zeminle yaptığı açının ölçüsü 60° dir.

Buna göre rampanın kamyona dayandığı noktanın yerden yüksekliğinin kaç metre olduğunu bulalım.

Çözüm

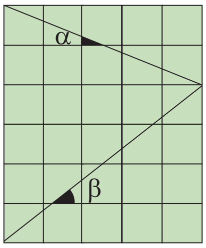


Problemi yandaki gibi modelleyelim.

$\widehat{ABC}$ nde

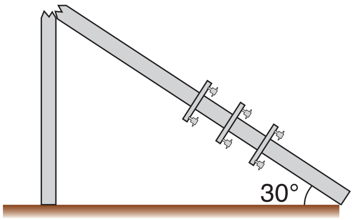
$$\sin 60° = \frac{|AB|}{|AC|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2} \Rightarrow h = \sqrt{3} \text{ m olur.}$$

1. $\dfrac{\tan 30° - \cot 45°}{\cot 60° - \cos 30°}$ işleminin sonucu kaçtır?

2. 

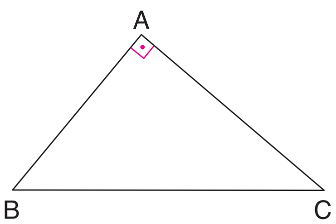
Yandaki şekil eş birim karelerden oluşmuştur.

Buna göre $\tan\alpha + \cot\beta$ kaçtır?

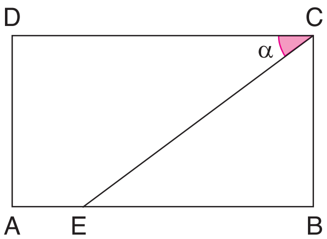
3. 

Bir elektrik direği yerden 1,4 m yükseklikten kırılarak yere 30° lik açı yapacak şekilde düşmüştür.

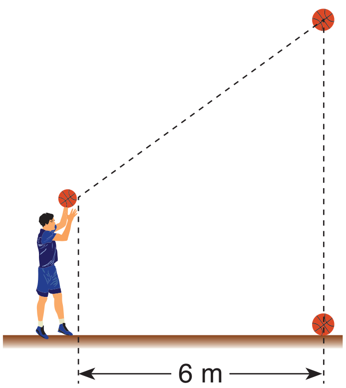
Elektrik direğinin kırılmadan önceki boyu kaç metredir?

4. 

$\widehat{ABC}$ nde $[BA] \perp [AC]$, $\sin(\widehat{ACB}) = \dfrac{3}{5}$ ve $|AB| = 8$ cm olduğuna göre $|AC|$ kaç santimetredir?

5. 

ABCD dikdörtgeninde $|AB| = 5 \cdot |AE| = 2 \cdot |BC|$ ve $m(\widehat{DCE}) = \alpha$ olduğuna göre $\cot\alpha$ kaçtır?

6. 

İlker elindeki topu 60° lik açıyla havaya doğru atıyor. Top yerden $7\sqrt{3}$ m yükselip İlker'den 6 metre uzağa düşüyor.

İlker topu kaç metre yükseklikten fırlatmıştır?

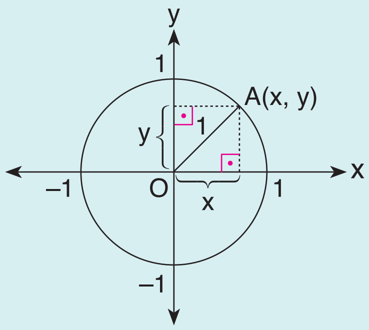
9.4.4.4. Birim Çember ve Trigonometrik Oranların Birim Çember Üzerindeki Noktaların Koordinatları ile İlişkisi

Yarıçapının uzunluğu 1 metre olan bir çember çiziliyor. Başlangıç noktaları çemberin merkezi olacak şekilde iki ışın çizilerek bir geniş açı oluşturuluyor.

» Oluşturulan bu geniş açının trigonometrik oranlarını nasıl hesaplayabilirsiniz?

Bilgi Kutusu

Merkezi orijin ve yarıçapının uzunluğu 1 birim olan çembere **birim çember** denir.



A(x, y) noktası birim çember üzerinde ise $x^2 + y^2 = 1$ olur.

Örnek

$A\left(a, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ noktası birim çember üzerinde olduğuna göre a nın alacağı değerlerin çarpımını bulalım.

Çözüm

$A\left(a, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ noktası birim çember üzerindeyse

$$a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + \frac{3}{16} = 1 \Rightarrow a^2 = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{\sqrt{13}}{4} \text{ veya } a = \frac{\sqrt{13}}{4} \text{ olur.}$$

O hâlde $\left(-\frac{\sqrt{13}}{4}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right) = -\frac{13}{16}$ bulunur.

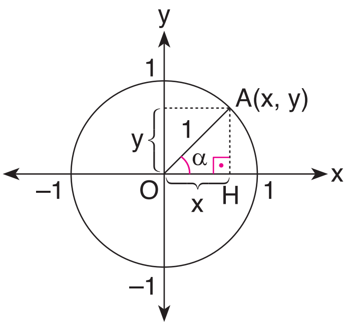
Gıyaseddin Cemşit
(?-1429)

Aritmetik ve geometri üzerine çalışmaları olan iyi bir matematikçi ve gök bilimcidir. Eserlerinde her dereceden kök almayı, ondalık kesirlerle ilgili kuralları ve dört işlemi göstermiştir. Pi sayısının virgülden sonra on yedinci basamağa kadar doğru olarak hesaplanmasını sağlayan yöntemi açıklamıştır. 1 derecelik yayın sinüsünü geometri ve cebir yoluyla hesaplamış, trigonometrik tabloların düzenlenmesi işini kolaylaştırmıştır. Trigonometrideki yeni buluşları, hesaplama yöntemleri ve yaklaşık hesap kuralları ile matematik tarihinde yerini tescil etmiştir.

Örnek

Dik koordinat sisteminin birinci bölgesinde ve birim çember üzerinde alınan bir noktayı orijine birleştiren doğru parçasının eğim açısının trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözüm

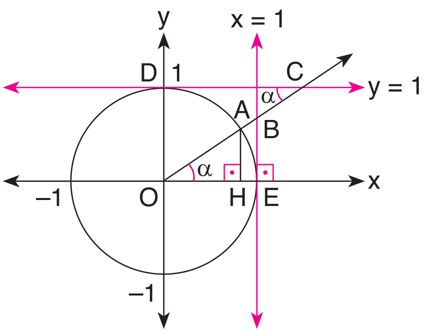


A(x, y) noktasını orijine birleştiren doğru parçasının eğim açısı α olsun.

$\widehat{AOH}$ nde $\sin\alpha = \dfrac{|AH|}{|OA|} = \dfrac{|AH|}{1} = y,$

$\cos\alpha = \dfrac{|OH|}{|OA|} = \dfrac{|OH|}{1} = x$ olur.

Koordinat sisteminde x = 1 ve y = 1 doğrularını çizelim.

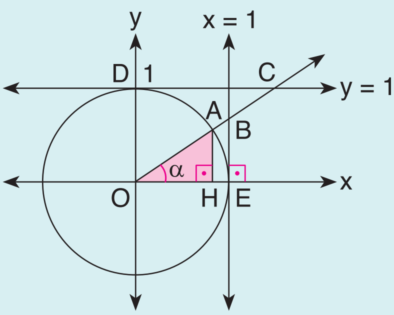


$m(\widehat{OCD}) = m(\widehat{BOE}) = \alpha$ olur.

$\widehat{BOE}$ nde $\tan\alpha = \dfrac{|BE|}{|OE|} = \dfrac{|BE|}{1} = |BE|$ ve

$\widehat{ODC}$ nde $\cot\alpha = \dfrac{|CD|}{|OD|} = \dfrac{|CD|}{1} = |CD|$ bulunur.

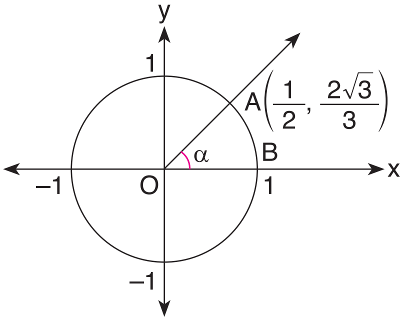
Bilgi Kutusu



α açısının ölçüsünün kosinüs değeri, A noktasının apsisine, sinüs değeri A noktasının ordinatına eşittir.

α açısının tanjant değeri, [OA nın x = 1 doğrusunu kestiği B noktasının ordinatına, kotanjant değeri [OA nın y = 1 doğrusunu kestiği C noktasının apsisine eşittir.

Örnek



Şekildeki [OA, birim çemberi $A\left(\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ noktasında kesmektedir.

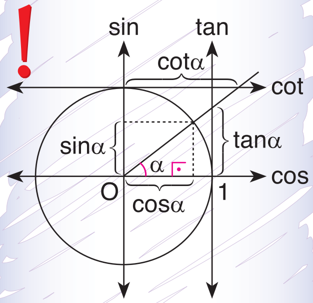
$\sin(\widehat{AOB}) = \alpha$ ise $\sin\alpha$ ve $\cos\alpha$ değerlerini bulalım.

Çözüm

A noktasının apsisi $\cos\alpha$, ordinatı $\sin\alpha$ değerine eşittir.

O hâlde $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ ve $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ olur.

!

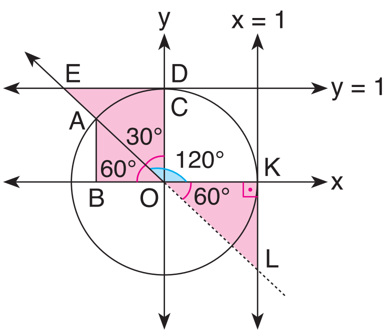


x ekseni kosinüs ekseni, y ekseni sinüs ekseni, x = 1 doğrusu tanjant ekseni, y = 1 doğrusu kotanjant ekseni olarak adlandırılır.

Örnek

120° lik açı ölçüsünün trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözüm



$m(\widehat{AOB}) = 180° - 120° = 60°$ olup

$\widehat{ABO}$ nde $|AO| = 1$ birim ise

$|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $|OB| = \frac{1}{2}$ birimdir.

(30°-60°-90° üçgeni)

$m(\widehat{EOD}) = 30°$ olur.

A noktası dik koordinat sisteminin ikinci bölgesinde olduğundan apsisi negatif, ordinatı pozitiftir. Buradan A noktasının koordinatları $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ olur. O hâlde $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ ve $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

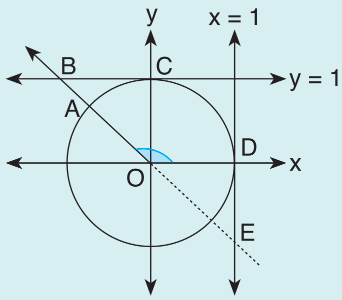
$m(\widehat{EOD}) = 30°$ olup $\widehat{EOD}$ nde $|OD| = 1$ birim ise $|ED| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ birim olup E noktasının apsisi $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ tür. O hâlde $\cot 120° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ olur.

$m(\widehat{KOL}) = 60°$ olup $\widehat{KLO}$ nde $|KO| = 1$ birim ise $|KL| = \sqrt{3}$ birim olup L noktasının apsisi $-\sqrt{3}$ tür. O hâlde $\tan 120° = -\sqrt{3}$ olur.

Ebu'l Vefa (940-998)

Trigonometrinin gelişmesine katkıları bulunan İran asıllı matematikçi ve astronomdur. Ay'a ilişkin çalışmalarında tanjant ve kotanjant fonksiyonlarını ilk kez kullanmıştır. Trigonometrik fonksiyonları çok iyi kullanmış ve tanıtmıştır. Yarım açı formüllerini ispatlamıştır. Trigonometri dışında cebir ile ilgili de çalışmıştır.

Bilgi Kutusu

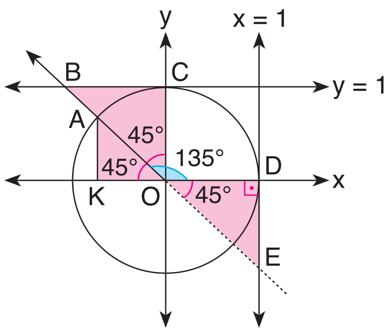


- Geniş açıların birim çemberi kestiği nokta, dik koordinat sisteminin ikinci bölgesinde olduğu için bu noktanın apsisi negatif, ordinatı pozitiftir.
- [OA nın y = 1 doğrusunu kestiği B noktası, dik koordinat sisteminin ikinci bölgesinde olduğu için bu noktanın apsisi negatiftir.
- [OA nın uzantısının x = 1 doğrusunu kestiği E noktası, dik koordinat sisteminin dördüncü bölgesinde olduğu için bu noktanın ordinatı negatiftir.
- α geniş açı ise sinα değeri pozitif; cosα, tanα, cotα değerleri negatiftir.

Örnek

135° lik açı ölçüsünün trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözüm



$m(\widehat{AOK}) = 180° - 135° = 45°$,

$m(\widehat{BOC}) = 45°$ olur.

$\widehat{OKA}$ nde $|OA| = 1$ birim ise

$|KO| = |AK| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ birim olup

$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ dir.

$\widehat{OBC}$ nde $|OC| = 1$ birim $\Rightarrow$ $|BC| = 1$ birim olup B noktasının apsisi –1 dir.

$\widehat{ODE}$ nde $|OD| = 1$ birim $\Rightarrow$ $|DE| = 1$ birim olup E noktasının apsisi –1 dir.

O hâlde $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 135° = -1$ ve $\cot 135° = -1$ olur.

Sıra Sizde

150° lik açı ölçüsünün trigonometrik oranlarını bulunuz.

1. $A\left(\frac{a}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ noktası birim çember üzerinde olduğuna göre a nın alabileceği değerleri bulunuz.

2. Aşağıda verilen trigonometrik oranların değerlerinden negatif olanların yanındaki kutucukları işaretleyiniz.

☐ sin110°	☐ sin87°	☐ cos91°
☐ cot173°	☐ tan80°	☐ tan115°
☐ cos127°	☐ sin100°	☐ cot75°

3. 90° lik açı ölçüsünün sinüs ve kosinüs değerlerini bulunuz.

4. $\dfrac{\sin 120° - \cos 150°}{\cot 45° - \cot 135°}$ işleminin sonucunu bulunuz.

5. Dik koordinat sisteminin birinci bölgesinde ve birim çember üzerinde bulunan A noktasının apsisi ordinatının 2 katıdır.

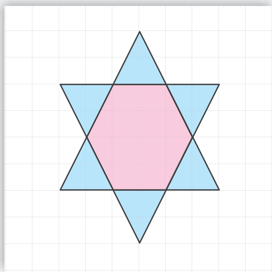
   Buna göre A noktasının koordinatlarını bulunuz.

6. $\dfrac{\sin 135° - \cos 30°}{\tan 60° \cdot \sin 150°}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Sembol ve Gösterimler

$A(\widehat{ABC})$

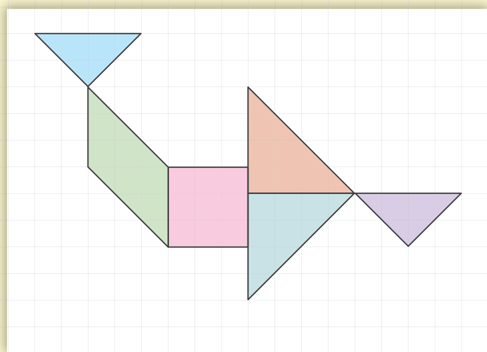
9.4.5. ÜÇGENİN ALANI



Bir otelin giriş kısmının zemininde yandaki gibi yıldız şeklinde bir desen oluşturulmuştur. Bu desende eş büyüklükte eşkenar üçgenler kullanılmıştır. Kullanılan eşkenar üçgenlerin bir kenarının uzunluğu 80 santimetredir.

- Desenin kapladığı alan kaç santimetrekaredir?

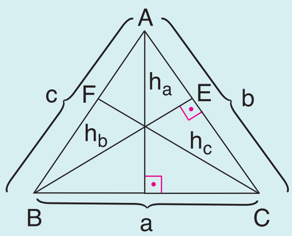
9.4.5.1. Üçgenin Alanı ile İlgili Problemler



» Kareli zeminde tam ve yarım kareler ile oluşturulan şeklin alanı kaç birimkaredir?

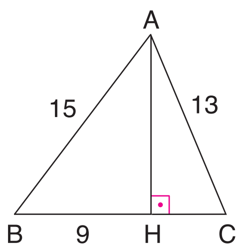
Bilgi Kutusu

Bir üçgenin alanı, bir kenarının uzunluğu ile o kenara ait yüksekliğinin çarpımının yarısına eşittir.



$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \text{ dir.}$$

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $[AH] \perp [BC]$, $|AB| = 15$ cm, $|BH| = 9$ cm ve $|AC| = 13$ cm ise $\widehat{AHC}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABH}$ nde Pisagor bağıntısından,

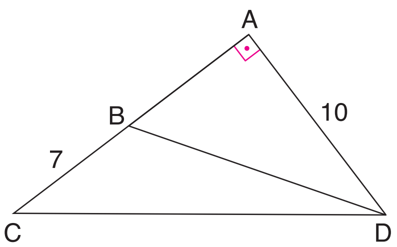
$|AH|^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow |AH|^2 = 225 - 81 \Rightarrow |AH|^2 = 144 \Rightarrow |AH| = 12$ cm olur.

$\widehat{AHC}$ nde Pisagor bağıntısından,

$|HC|^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow |HC|^2 = 169 - 144 \Rightarrow |HC|^2 = 25 \Rightarrow |HC| = 5$ cm olur.

Bu durumda $A(\widehat{AHC}) = \dfrac{|HC| \cdot |AH|}{2} = \dfrac{5 \cdot 12}{2} = 30$ cm^2 bulunur.

Örnek

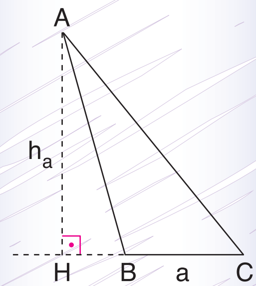


$\widehat{ADC}$ nde $[AD] \perp [AC]$,
$|AD| = 10$ cm ve $|BC| = 7$ cm ise $\widehat{BCD}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm

BCD geniş açılı üçgen olduğundan BC kenarına ait yükseklik [AD] olur.

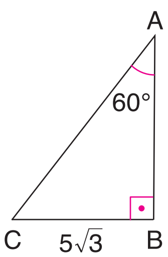
Bu durumda $A(\widehat{BCD}) = \dfrac{|BC| \cdot |AD|}{2} = \dfrac{7 \cdot 10}{2} = 35$ cm^2 bulunur.



ABC geniş açılı üçgeninde

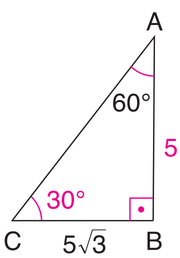
$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{a \cdot h_a}{2}$ olur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{CAB}) = 60°$, $[AB] \perp [BC]$ ve $|BC| = 5\sqrt{3}$ cm ise $\widehat{ABC}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm

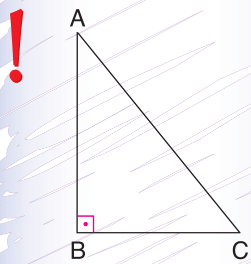


$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{ACB}) = 30°$ olur.

30°-60°-90° üçgeninden $|AB| = 5$ cm olur.

Bu durumda

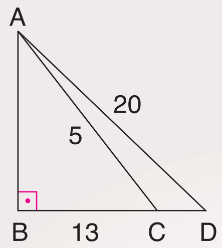
$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{5 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = \dfrac{25\sqrt{3}}{2}$ cm^2 bulunur.



ABC dik üçgeninde

$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{|BC| \cdot |AB|}{2}$ olur.

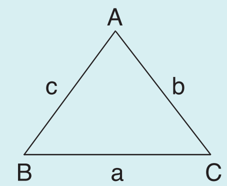
Sıra Sizde



ABC dik üçgen, $[AB] \perp [BC]$, $|AC| = 5$ cm, $|BC| = 13$ cm ve $|AD| = 20$ cm olduğuna göre $A(\widehat{ACD})$ kaç santimetrekaredir?

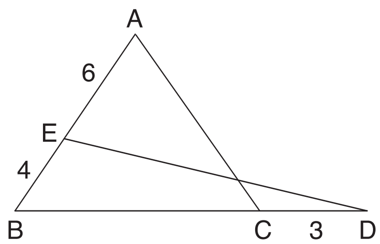
Bilgi Kutusu

İki kenar uzunluğu ve bu kenarların oluşturduğu açının ölçüsünün sinüs değerinin çarpımının yarısı üçgenin alanını verir.



$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\widehat{C} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\widehat{B} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\widehat{A}$$

Örnek



ABC ve EBD bir üçgen, $|AE| = 6$ cm, $|EB| = 4$ cm, $|CD| = 3$ cm ve $A(\widehat{ABC}) = 2 \cdot A(\widehat{EBD})$ olduğuna göre $|BC|$ nun kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABD}$, ABC ve EBD üçgenlerinde ortak açıdır. $A(\widehat{ABC}) = 2 \cdot A(\widehat{EBD})$ ise

$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin(\widehat{ABD}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |EB| \cdot |BD| \cdot \sin(\widehat{ABD})$ olur. Buradan

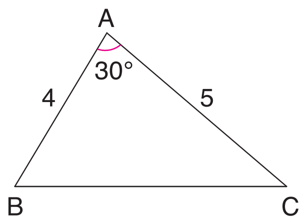
$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot |BC| \cdot \sin(\widehat{ABD}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (|BC| + 3) \cdot \sin(\widehat{ABD})$$

$\Rightarrow 10 \cdot |BC| = 8 \cdot |BC| + 24 \Rightarrow 2 \cdot |BC| = 24 \Rightarrow |BC| = 12$ cm olur.

Sıra Sizde

Bir ABC üçgeninde $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 4$ cm ve $60° \leq m(\widehat{B}) \leq 150°$ olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ nın alabileceği en büyük ve en küçük değeri kaç santimetrekaredir?

Örnek

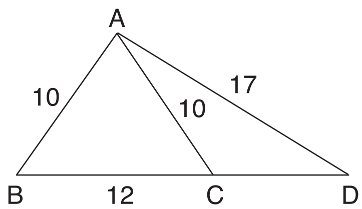


$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{BAC}) = 30$, $|AB| = 4$ cm ve $|AC| = 5$ cm olduğuna göre ABC üçgeninin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm

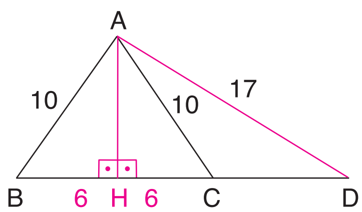
$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ cm}^2$ bulunur.

Örnek



$\widehat{ABD}$ nde $|AB| = |AC| = 10$ cm, $|BC| = 12$ cm, $|AD| = 17$ cm ise $\widehat{ACD}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm



ABC ikizkenar üçgen olduğu için

$[AH] \perp [BC]$ ve $|BH| = |HC| = 6$ cm olur.

$\widehat{AHC}$ nde Pisagor bağıntısından

$|AH|^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow |AH|^2 = 100 - 36$

$\Rightarrow |AH|^2 = 64$

$\Rightarrow |AH| = 8$ cm olur.

$\widehat{AHD}$ nde Pisagor bağıntısından

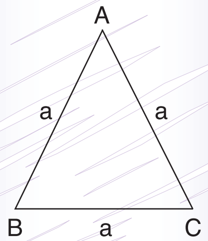
$8^2 + |HD|^2 = 17^2 \Rightarrow |HD|^2 = 289 - 64$

$\Rightarrow |HD|^2 = 225$

$\Rightarrow |HD| = 15$ cm olur.

$|CD| = |HD| - |HC| = 15 - 6 = 9$ cm olur.

$A(\widehat{ACD}) = \frac{|CD| \cdot |AH|}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36 \text{ cm}^2$ bulunur.

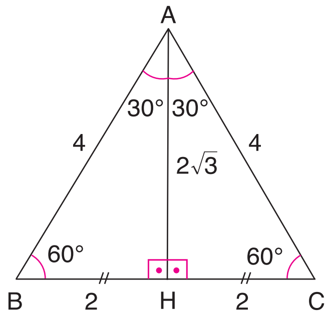


Bir kenarı a birim olan eşkenar üçgenin alanı $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ birimkaredir.

Örnek

Kenar uzunlukları 4 cm olan ABC eşkenar üçgeninin alanını bulalım.

Çözüm



ABC eşkenar üçgeninde yükseklik, kenarortay ve açıortay çakışıktır.

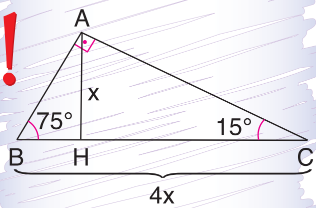
Bu nedenle [AH] ⊥ [BC] ise

$|BH| = |HC| = 2$ cm ve

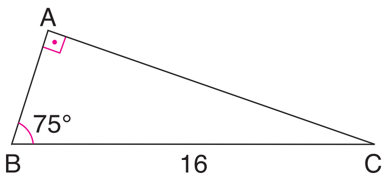
$m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{HAC}) = 30°$ olur.

$\widehat{AHC}$ nde 30°-60°-90° üçgeni yardımıyla $|AH| = 2\sqrt{3}$ cm bulunur.

Bu durumda $A(\widehat{ABC}) = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm^2 olur.

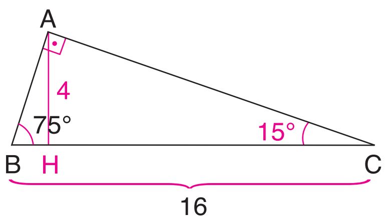


Örnek



$\widehat{ABC}$ nde [AB] ⊥ [AC], $m(\widehat{ABC}) = 75°$ ve $|BC| = 16$ cm ise $\widehat{ABC}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm



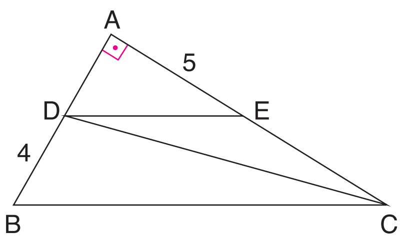
$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{ACB}) = 15°$ olur.

15°-75°-90° üçgeninde hipotenüse ait yükseklik, hipotenüs uzunluğunun $\frac{1}{4}$ ine eşittir.

O hâlde $|BC| = 16$ cm olduğundan $AH = 16 \cdot \frac{1}{4} = 4$ cm olur.

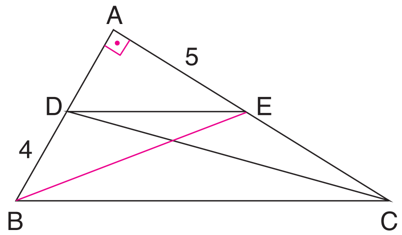
Bu durumda $A(\widehat{ABC}) = \frac{16 \cdot 4}{2} = 32$ cm^2 bulunur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde [AB] ⊥ [AC], [DE] // [BC], $|BD| = 4$ cm ve $|AE| = 5$ cm ise $\widehat{DEC}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm

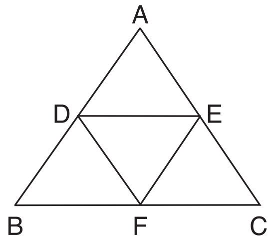


B ile E noktalarını birleştirelim. [DE] // [BC] olduğundan $\widehat{BED}$ ile $\widehat{DEC}$ nin ortak olan |DE| na ait yükseklikleri eştir.

Bu nedenle $A(\widehat{BED}) = A(\widehat{DEC})$ dir.

$A(\widehat{DEC}) = A(\widehat{BED}) = \dfrac{|BD|\cdot|AE|}{2} = \dfrac{4\cdot 5}{2} = 10\ cm^2$ bulunur.

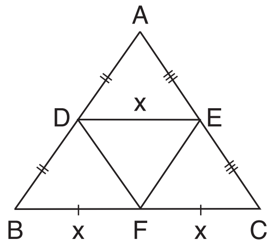
Örnek



D, E ve F noktaları $\widehat{ABC}$ nde bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

$A(\widehat{EFC}) = 7\ cm^2$ olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm



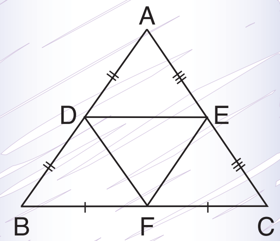
[DE] orta tabandır.

Bu nedenle |DE| = |BF| = |FC| = x olur.

[DE] // [BC] ve D ve E orta noktalar olduğundan $\widehat{ADE}$, $\widehat{DBF}$, $\widehat{DEF}$ ve $\widehat{EFC}$ nin yükseklikleri eşittir. Yükseklikleri ve bu yüksekliklere ait kenar uzunlukları eşit olan üçgenlerin alanları eşittir.

Bu nedenle $A(\widehat{ADE}) = A(\widehat{DBF}) = A(\widehat{DEF}) = A(\widehat{EFC}) = 7\ cm^2$ olur.

Bu durumda $A(\widehat{ABC}) = 4\cdot 7 = 28\ cm^2$ bulunur.



$\widehat{ABC}$ nde D, E ve F orta noktalar olsun.

Bu durumda

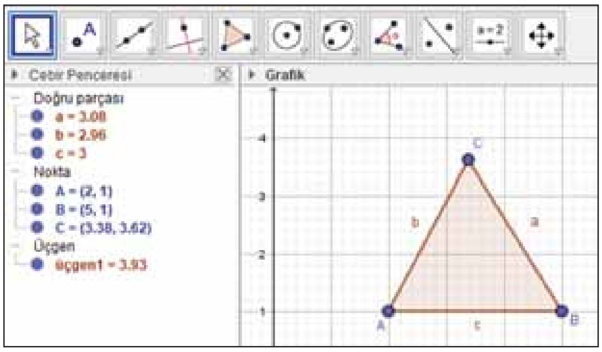
$A(\widehat{ADE}) = A(\widehat{DBF}) = A(\widehat{DEF}) = A(\widehat{EFC})$ dir.

Örnek

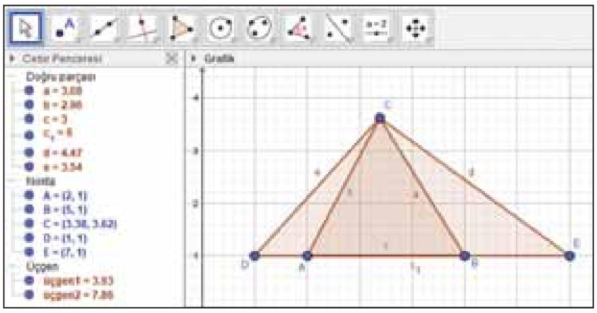
Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin taban uzunluğu değişim oranı ile alanın değişim oranı arasındaki ilişkiyi dinamik matematik programı yardımıyla gösterelim.

Çözüm

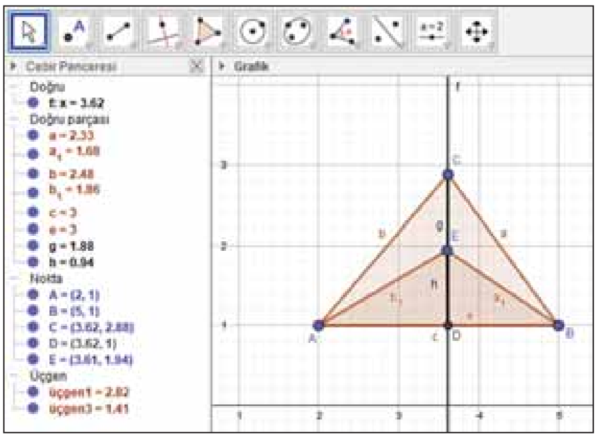
Dinamik matematik programlarından GeoGebra programını kullanalım. Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayalım. Ardından grafik penceresinde üç farklı noktayı birleştirerek bir ABC üçgeni oluşturalım.



Daha sonra grafik penceresinde bir köşesi C noktası olan ve DE kenarı AB kenarının üzerinde olan bir CDE üçgeni oluşturalım. Cebir penceresinde c ve c1 kenarlarının uzunluklarının oranının üçgen1 ve üçgen2 çokgenlerinin alanlarının oranına eşit olduğunu görürüz.



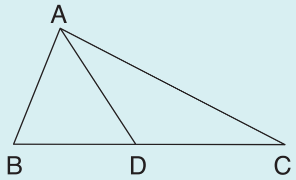
Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayalım. Ardından grafik penceresinde üç farklı noktayı birleştirerek bir ABC üçgeni oluşturalım. Grafik penceresinde bir köşesi E noktası olan EAB üçgeni oluşturalım.ww Daha sonra programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Dik Doğru" kısmına tıklayalım. C noktasına ve karşısındaki kenara tıklayıp dik doğruyu oluşturalım. Ardından programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Doğru Parçası" kısmına tıklayalım. Cebir penceresinde g ve h yüksekliklerinin uzunluklarının oranının üçgen1 ve üçgen3 çokgenlerinin alanlarının oranına eşit olduğunu görürüz.



Sonuç olarak yükseklikleri eşit olan üçgenlerin taban uzunluklarının oranı ile alanlarının oranının eşit olduğu ve taban uzunlukları eşit olan üçgenlerin yüksekliklerinin oranı ile alanlarının oranının eşit olduğu görülür.

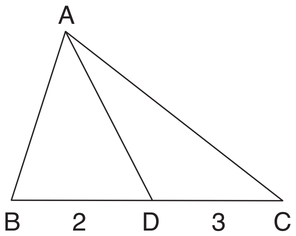
Bilgi Kutusu

Yükseklikleri eş olan üçgenlerin alanları oranı, bu yükseklik-lere ait kenar uzunluklarının oranına eşittir.



$$\frac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{ADC})} = \frac{|BD|}{|DC|}$$

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $|BD| = 2$ cm, $|DC| = 3$ cm ve $A(\widehat{ADC}) = 45$ cm^2 $\widehat{ABD}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

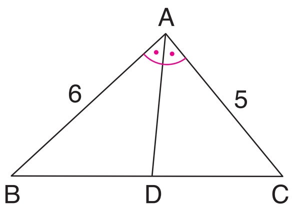
Çözüm

$\widehat{ADC}$ ile $\widehat{ABD}$ nın yükseklikleri aynı olduğundan $\dfrac{A(\widehat{ADC})}{A(\widehat{ABD})} = \dfrac{|DC|}{|BD|}$ olur.

$$\frac{45}{A(\widehat{ABD})} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3 \cdot A(\widehat{ABD}) = 45 \cdot 2$$

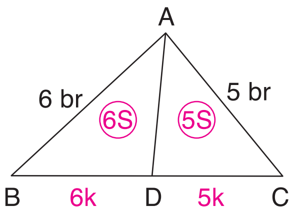
$$\Rightarrow A(\widehat{ABD}) = \frac{90}{3} \Rightarrow A(\widehat{ABD}) = 30 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

Örnek



ABC üçgeninde [AD], $\widehat{BAC}$ nın açıortayı, $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 5$ cm ve $A(\widehat{ABC}) = 143$ cm^2 ise $\widehat{ADC}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm

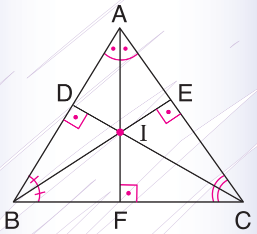


[AD] açıortay olduğundan $|BD| = 6k$, $|DC| = 5k$ olur.

$\widehat{ABD}$ ile $\widehat{ADC}$ nin yükseklikleri eşit olduğundan $A(\widehat{ABD}) = 6S$ ve $A(\widehat{ADC}) = 5S$ olur.

$A(\widehat{ABC}) = 143 \Rightarrow 6S + 5S = 143 \Rightarrow 11S = 143 \Rightarrow S = 13$ cm^2 olur.

$A(\widehat{ADC}) = 5 \cdot S = 5 \cdot 13 = 65$ cm^2 bulunur.

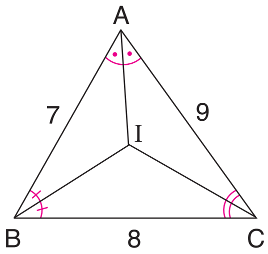


$\widehat{ABC}$ nin iç açıortaylarının kesim noktası I olsun. Açıortay üzerinden açının kollarına indirilen diklerin uzunlukları eşit olduğundan

$|DI| = |IE| = |IF|$ dır.

$\widehat{AIB}$, $\widehat{AIC}$ ve $\widehat{IBC}$ nin yükseklikleri eş olduğundan, bu üçgenin alanları taban uzunlukları ile orantılıdır.

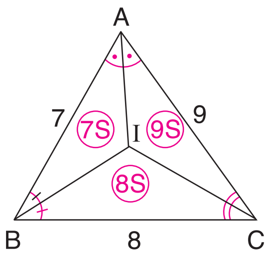
Örnek



$\widehat{ABC}$ nin iç açıortaylarının kesim noktası I dır.

$|AB| = 7$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 9$ cm ve $A(\widehat{ABC}) = 48$ cm^2 olduğuna göre $\widehat{IAC}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm



I iç açıortayların kesim noktası olduğundan $\widehat{AIB}$, $\widehat{AIC}$ ve $\widehat{IBC}$ nin alanları taban uzunlukları ile doğru orantılıdır.

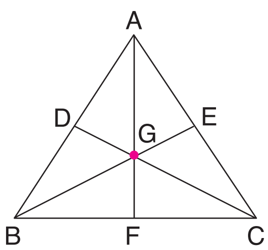
Bu nedenle $A(\widehat{AIB}) = 7S$, $A(\widehat{AIC}) = 9S$ ve $A(\widehat{IBC}) = 8S$ olur. $A(\widehat{ABC}) = 48$ cm^2 olduğundan

$7S + 8S + 9S = 48 \Rightarrow 24S = 48$

$\Rightarrow S = 2$ cm^2 olur.

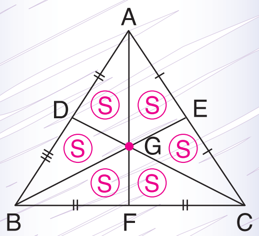
Buradan $A(\widehat{IAC}) = 9 \cdot S = 9 \cdot 2 = 18$ cm^2 bulunur.

Örnek



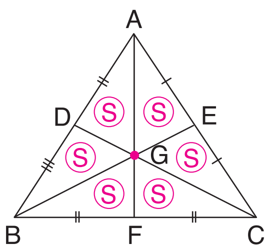
Şekildeki $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi G noktasıdır.

$A(\widehat{ABC}) = 66$ cm^2 ise $\widehat{AGE}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.



Bir üçgenin üç kenarortayı üçgenin alanını altı eş parçaya böler.

Çözüm



$A(\widehat{AGE}) = S$ olsun. G ağırlık merkezi olduğundan $|AE| = |EC|$ dir.

$A(\widehat{AGE}) = S$ ise $A(\widehat{EGC}) = S$ olur.

$|AG| = 2k$, $|GF| = k$ olur.

$\dfrac{A(\widehat{CAG})}{A(\widehat{CGF})} = \dfrac{2}{1}$ olur.

Buradan $A(\widehat{CAG}) = 2S$ ise $A(\widehat{CGF}) = S$ bulunur.

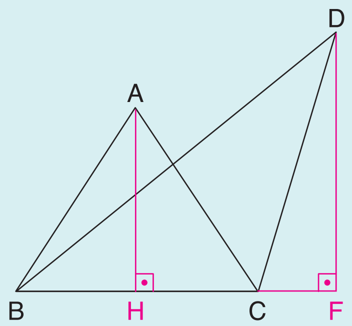
Benzer şekilde $A(\widehat{ADG}) = A(\widehat{BDG}) = A(\widehat{GBF}) = S$ olur.

$A(\widehat{ABC}) = 66 \Rightarrow 6S = 66 \Rightarrow S = 11$ cm^2 bulunur.

Bu durumda $A(\widehat{AGE}) = S = 11$ cm^2 olur.

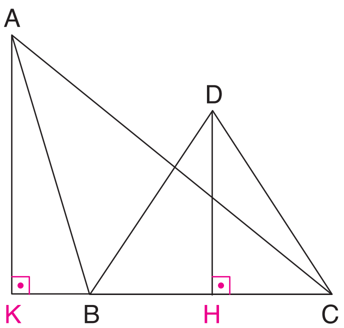
Bilgi Kutusu

Aynı tabana sahip üçgenlerin alanları oranı, eşit olan taban uzunluklarına ait yüksekliklerin oranına eşittir.



$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DBC})} = \frac{\frac{|BC| \cdot |AH|}{2}}{\frac{|BC| \cdot |DF|}{2}} = \frac{|AH|}{|DF|} \text{ olur.}$$

Örnek



Şekilde $[DH] \perp [BC]$, $[AK] \perp [KC]$, $|DH| = 4$ cm, $|AK| = 5$ cm ve $A(\widehat{DBC}) = 16 \text{ cm}^2$ ise $\widehat{ABC}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DBC}$ nin ortak tabanları [BC] olur.

O hâlde $\dfrac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DBC})} = \dfrac{|AK|}{|DH|} \Rightarrow \dfrac{A(\widehat{ABC})}{16} = \dfrac{5}{4}$

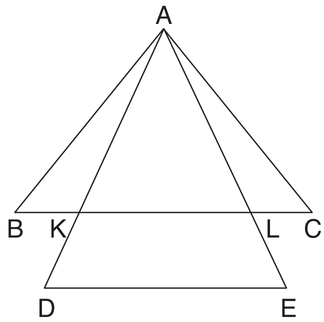
$\Rightarrow 4 \cdot A(\widehat{ABC}) = 5 \cdot 16$

$\Rightarrow A(\widehat{ABC}) = 20 \text{ cm}^2$ bulunur.

Bilgi Kutusu

Benzer üçgenlerin alanları oranı, benzerlik oranının karesine eşittir. $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ ve bu üçgenlerin benzerlik oranı k olsun. $\dfrac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = k^2$ olur.

Örnek

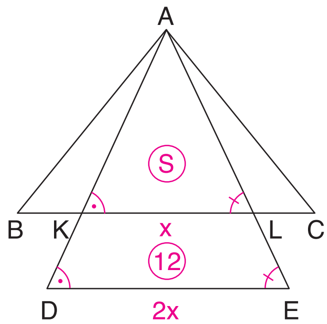


Şekilde [BC] // [DE],

$6|KL| = 2|BC| = 3|DE|$ ve

$A(KLED) = 12\ cm^2$ ise $\widehat{ABC}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm



[BC] // [DE] olduğundan $\widehat{AKL} \sim \widehat{ADE}$ dir.

$\dfrac{|KL|}{|DE|} = \dfrac{1}{2}$ olduğundan benzerlik oranı $\dfrac{1}{2}$ dir.

Bu üçgenlerin alanları oranı benzerlik oranının karesine eşit olduğundan

$$\frac{A(\widehat{AKL})}{A(\widehat{ADE})} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{S+12} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4S = S + 12$$

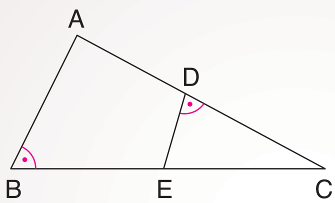
$$\Rightarrow 3S = 12 \Rightarrow S = 4\ cm^2 \text{ olur.}$$

O hâlde $A(\widehat{AKL}) = 4\ cm^2$ olur.

$\widehat{AKL}$ ile $\widehat{ABC}$ nin yükseklikleri eşittir. $|KL| = x$ ve $|BC| = 3x$ olduğundan

$$\frac{A(\widehat{AKL})}{A(\widehat{ABC})} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4}{A(\widehat{ABC})} = \frac{1}{3} \Rightarrow A(\widehat{ABC}) = 12\ cm^2 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

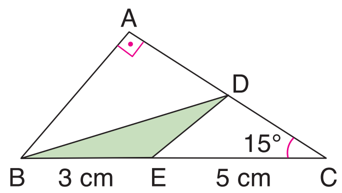


Şekilde $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{CBA})$,

$\dfrac{|EC|}{|AC|} = \dfrac{3}{4}$ ve

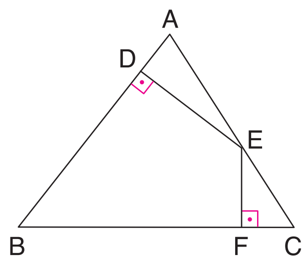
$A(\widehat{DEC}) = 2\ cm^2$ olduğuna göre $\widehat{ABC}$ nin alanı kaç santimetrekaredir?

1.



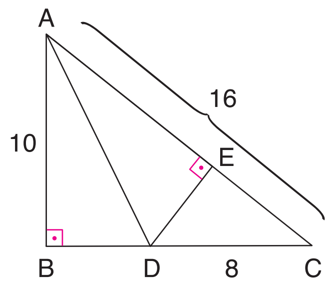
$\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [AC]$, $|AD| = |DC|$, $m(\widehat{ACB}) = 15°$, $|BE| = 3$ cm ve $|EC| = 5$ cm olduğuna göre $A(\widehat{BED})$ kaç santimetrekaredir?

2.



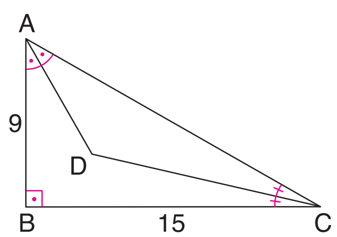
$\widehat{ABC}$ nde $|EF| = 4$ cm, $|DE| = 6$ cm, $|BC| = 10$ cm ve $|AB| = 8$ cm olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ kaç santimetrekaredir?

3.



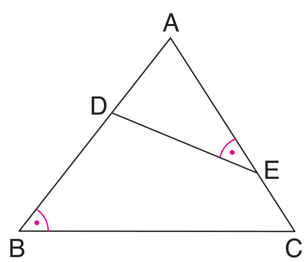
$\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [BC]$, $[DE] \perp [AC]$, $|DC| = 8$ cm, $|AB| = 10$ cm ve $|AC| = 16$ cm olduğuna göre $|DE|$ kaç santimetredir?

4.



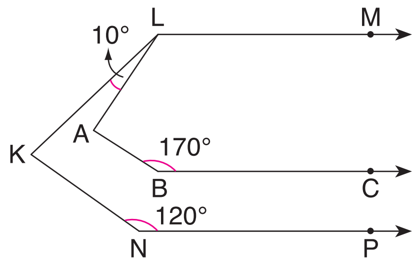
$\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [BC]$, $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC})$, $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{DCA})$, $|AB| = 9$ cm ve $|BC| = 15$ cm olduğuna göre $A(\widehat{ADC})$ kaç santimetrekaredir?

5.



$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{ABC})$, $\dfrac{|DA|}{|CA|} = \dfrac{2}{3}$ ve $A(\widehat{ADE}) = 24$ cm^2 olduğuna göre A(BDEC) kaç santimetrekaredir?

1.



Şekilde [LM // [BC // [NP,

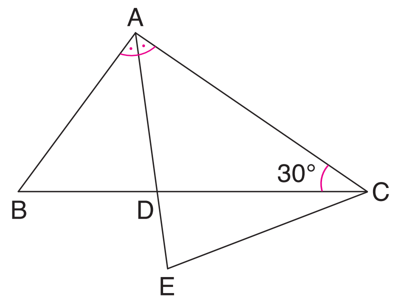
$m(\widehat{KLA}) = 10°$, $m(\widehat{ABC}) = 170$,

$m(\widehat{KNP}) = 120°$ ve $m(\widehat{LKN}) = 2 \cdot m(\widehat{LAB})$

olduğuna göre $m(\widehat{ALM})$ kaç derecedir?

A) 110 B) 130 C) 140 D) 150 E) 160

2.



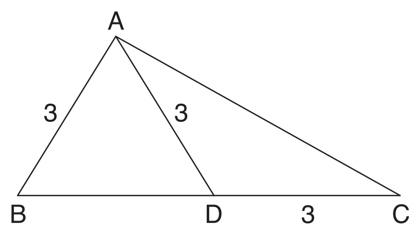
Şekilde $|AB| = |AD|$, $|CD| = |CE|$,

$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{EAC})$, $m(\widehat{ACB}) = 30°$

olduğuna göre $m(\widehat{DCE})$ kaç derecedir?

A) 40 B) 35 C) 30 D) 25 E) 20

3.



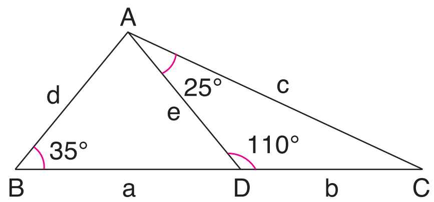
ABC üçgeninde $D \in [BC]$,

$|AB| = |AD| = |DC| = 3$ cm

olduğuna göre $|AC|$ nun santimetre cinsinden kaç farklı tam sayı değeri vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4.



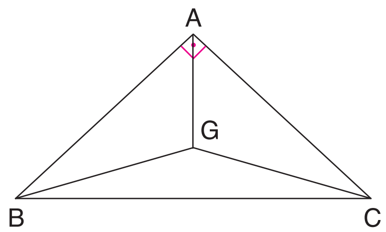
ABC üçgeninde $D \in [BC]$, $m(\widehat{ABC}) = 35°$,

$m(\widehat{ADC}) = 110°$, $m(\widehat{DAC}) = 25°$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) $a > d$ B) $e > b$ C) $a + b > c$ D) $d > c$ E) $b > c$

5.

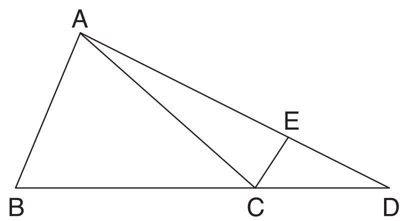


$\widehat{ABC}$ nde $[BA] \perp [AC]$, $|AB| = 30$ cm,

$|AG| = 26$ cm ve G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi olduğuna göre $|AC|$ kaç santimetredir?

A) $72\sqrt{2}$ B) 72 C) 68 D) $36\sqrt{2}$ E) 36

6.

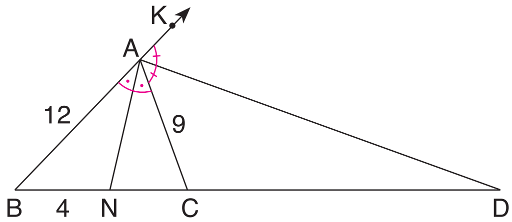


$\widehat{ABC}$ nde $2|AD| = 5|ED|$, $|BD| = 3|CD|$ dır.

$A(ECD) = 16 \text{ cm}^2$ olduğuna göre A(ABD) kaç santimetrekaredir?

A) 140 B) 120 C) 114 D) 96 E) 80

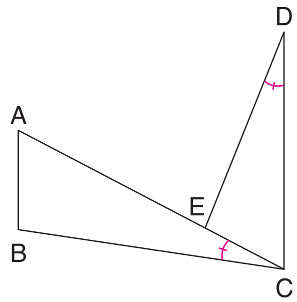
7.



$\widehat{ABC}$ üçgeninde m($\widehat{BAC}$) = m($\widehat{NAC}$),
m($\widehat{CAD}$) = m($\widehat{DAK}$), |AB| = 12 cm,
|BN| = 4 cm ve |AC| = 9 cm
olduğuna göre |CD| kaç santimetredir?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

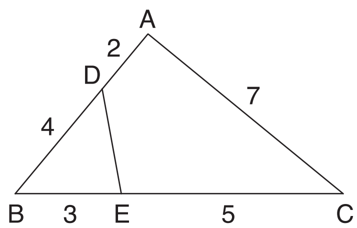
8.



Şekilde m($\widehat{EDC}$) = m($\widehat{ACB}$), |BC| = |ED|,
|AC| = |DC|, |EC| = (3x + 4) cm,
|AB| = (x + 10) cm olduğuna göre göre x kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

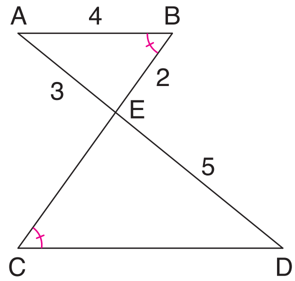
9.



$\widehat{ABC}$ nde D ∈ [AB], E ∈ [BC],
|AD| = 2 cm, |DB| = 4 cm, |BE| = 3 cm,
|EC| = 5 cm ve |AC| = 7 cm
olduğuna göre |DE| kaç santimetredir?

A) $\frac{5}{2}$ B) 3 C) $\frac{7}{2}$ D) 5 E) $\frac{9}{2}$

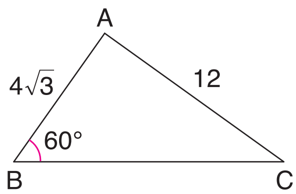
10.



Şekilde
[CB] ∩ [AD] = {E},
[AB] // [CD] dir.
|AB| = 4 cm,
|AE| = 3 cm,
|BE| = 2 cm,
|ED| = 5 cm
olduğuna göre |EC| + |CD| kaç santimetredir?

A) 8 B) 10 C) 16 D) 20 E) 22

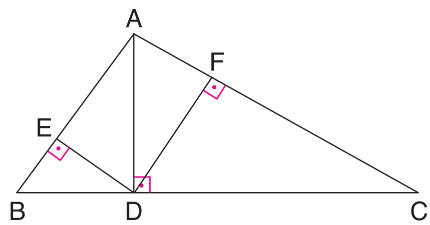
11.



$\widehat{ABC}$ nde
|AB| = $4\sqrt{3}$ cm,
|AC| = 12 cm
ve m($\widehat{ABC}$) = 60° olduğuna göre A($\widehat{ABC}$) kaç santimetrekaredir?

A) $24\sqrt{3}$ B) 24 C) $12\sqrt{3}$ D) 12 E) $8\sqrt{3}$

12.



ABC üçgeninde
[AD] ⊥ [BC], [DF] ⊥ [AC], [DE] ⊥ [AB],
|AF| = 4 cm, |FC| = 16 cm ve |BD| = $2\sqrt{5}$ cm
olduğuna göre |ED| kaç santimetredir?

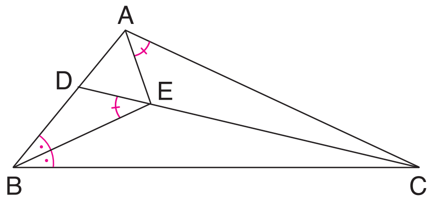
A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 3 D) 4 E) $4\sqrt{3}$

13. $$\frac{\sin 60° - \cos 150°}{\cos 120° + \sin 90°}$$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 1 B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{3} - 1$ D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

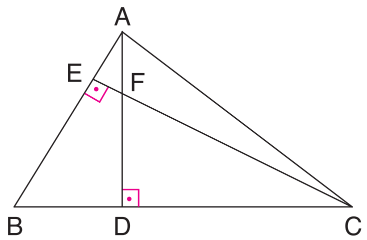
1.



ABC üçgeninde $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{EBC})$,
$m(\widehat{DEB}) = m(CAE)$, $m(\widehat{DAE}) = 40°$,
$m(\widehat{ACE}) = 20°$ ve $m(\widehat{DCB}) = 30°$
olduğuna göre $m(\widehat{CAE})$ kaç derecedir?

A) 30 B) 40 C) 45 D) 50 E) 55

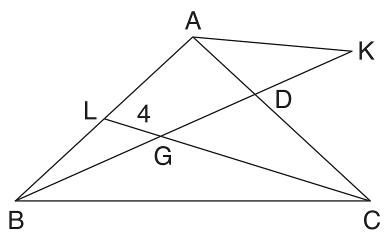
2.



$\widehat{ABC}$ nde $[CE] \perp [AB]$ ve $[AD] \perp [BC]$,
$|EF| = 2$ cm, $|BD| = 4$ cm, $|AD| = 6$ cm
olduğuna göre A(EBDF) kaç santimetrekaredir?

A) 12 B) 9 C) 8 D) 6 E) 3

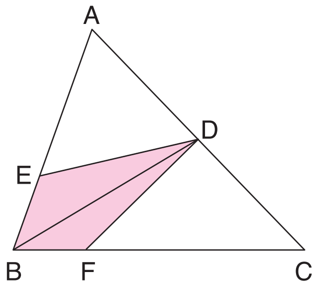
3.



$\widehat{ABC}$ nde $|AL| = |LB|$, $|GD| = |DK|$,
$|AD| = |DC|$ ve $|LG| = 4$ cm
olduğuna göre $|AK|$ kaç santimetredir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

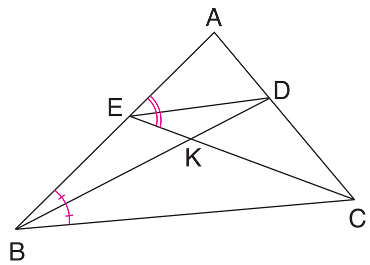
4.



$\widehat{ABC}$ nde $|BC| = 4 \cdot |BF|$, $|AB| = 4 \cdot |EB|$,
$|AD| = |DC|$ ve $A(\widehat{ABC}) = 64\ cm^2$
olduğuna göre boyalı alan kaç santimetrekaredir?

A) 10 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

5.



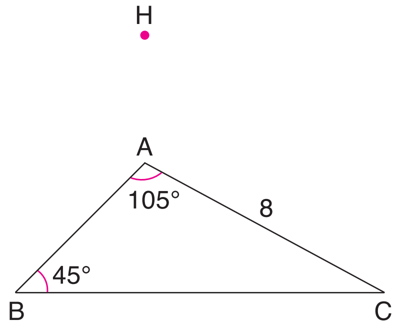
$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC})$,
$m(\widehat{AED}) = m(\widehat{DEC})$, $|BC| = 16$ cm,
$|AE| = 4$ cm ve $|EB| = 8$ cm
olduğuna göre $|KC|$ kaç santimetredir?

A) $\frac{10}{3}$ B) $\frac{32}{9}$ C) $\frac{14}{3}$ D) $\frac{16}{3}$ E) $\frac{28}{3}$

6. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ olmak üzere $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\tan\beta$ değerlerinin işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) –, +, + B) +, –, – C) +, +, – D) +, –, + E) +, +, +

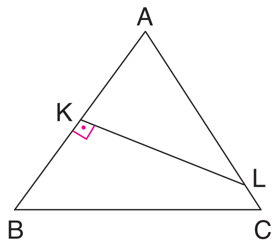
7.



H noktası $\widehat{ABC}$ nin diklik merkezidir. $m(\widehat{ABC}) = 45°$, $m(\widehat{BAC}) = 105°$ ve $|AC| = 8$ cm olduğuna göre H noktasının [BC] na olan uzaklığı kaç santimetredir?

A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) $4\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{3}$

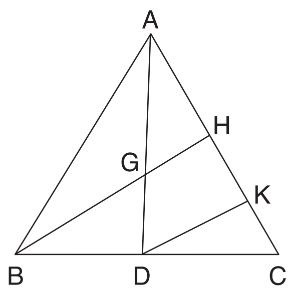
8.



$\widehat{ABC}$ üçgeninde $[LK] \perp [AB]$ dır. $|AK| = |KB|$, $|AC| = 9$ cm, $|BC| = 7$ cm ve $|LC|$ bir tam sayı olduğuna göre <u>en az</u> kaç santimetredir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

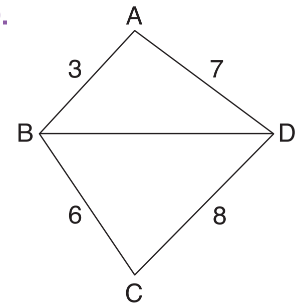
9.



G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezidir. [BH] // [DK] ve $|BH| = 9$ cm olduğuna göre $|DK|$ kaç santimetredir?

A) $\frac{4}{3}$ B) 3 C) $\frac{8}{3}$ D) $\frac{9}{2}$ E) 9

10.



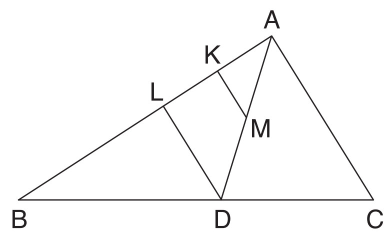
ABCD dörtgeninde $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|CD| = 8$ cm, $|DA| = 7$ cm ve $|BD|$ tam sayı olduğuna göre <u>en çok</u> kaç santimetredir?

A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 E) 14

11. Bir $\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [BC]$, $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{3}{5}$ ve $|AB| = 12$ cm olduğuna göre $|AC|$ kaç santimetredir?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 20 E) 25

12.



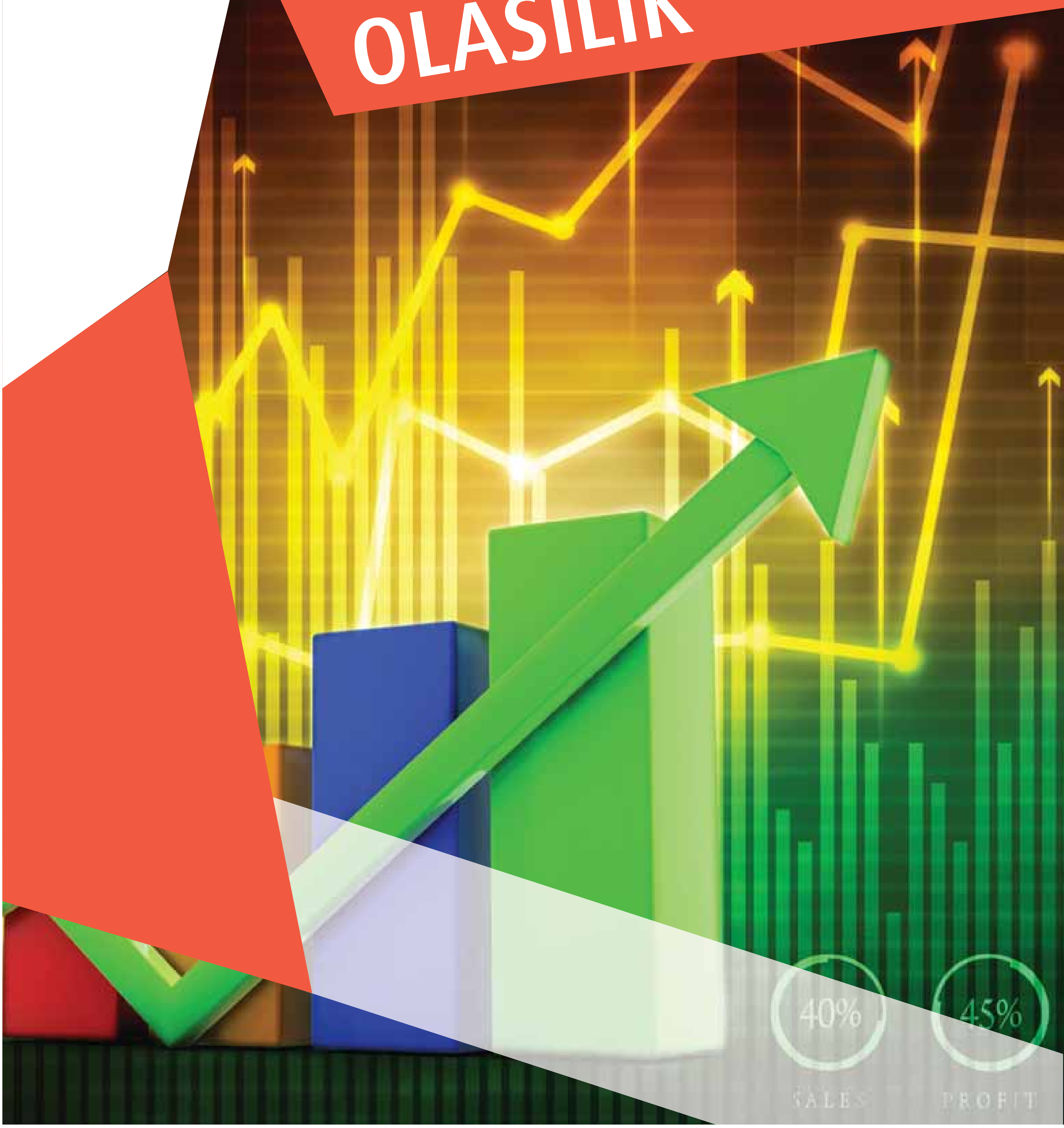
$\widehat{ABC}$ nde $D \in [BC]$, [AC] // [KM] // [LD], $4|AK| = 4|KL| = |AB|$ ve $|AC| = 12$ cm olduğuna göre $|KM|$ kaç santimetredir?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

13. Bir $\widehat{ABC}$ nde $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 6$ cm ve $A(\widehat{ABC}) = 18\sqrt{3}$ cm^2 olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ kaç derece olabilir?

A) 30 B) 45 C) 120 D) 135 E) 150

VERİ, SAYMA VE OLASILIK



VERİ

Bu Ünitede Neler Öğreneceğiz?

- Veri kavramı, kesikli ve sürekli veri
- Aritmetik ortalama
- Ortanca
- Tepe değer
- En büyük ve en küçük değer
- Açıklık
- Standart sapma
- Merkezi eğilim ve yayılım ölçülerini kullanarak gerçek hayat durumlarını yorumlama
- Histogram
- Grafik türleri ve yorumlama

Nerelerde Karşımıza Çıkar?

Grafik, verilerin daha kolay anlaşılmasını ve yorumlanmasını sağlar. Günlük yaşamda birçok bilgi grafikler yardımıyla bizlere aktarılmaktadır. Firma tanıtımı, nüfus sayımı, ürün tanıtımı, basın açıklaması, katalog yapımı, matematik, fizik, kimya gibi birçok alanda grafiklerden yararlanılır.

9.5.1. MERKEZİ EĞİLİM VE YAYILIM ÖLÇÜLERİ

Bir sınıfta yapılan bir sınavda Eda 80 puan almıştır.

- Eda'nın sınıftaki diğer arkadaşlarından daha başarılı bir öğrenci olduğunu söylemek için aldığı pauana bakmak yeterli midir? Yeterli değilse hangi karşılaştırmaları yapmak gerekir?

9.5.1.1. Verileri Merkezi Eğilim ve Yayılım Ölçülerini Hesaplayarak Yorumlama

- Bir çuval pirincin kütlesi
- Bir kavak ağacının boyu
- Bir tiyatro için satılan bilet sayısı

» Yukarıdaki ifadelerden hangisinin kaç farklı değer alabileceğini belirleyebilirsiniz? Neden?

Sembol ve Gösterimler

$\overline{X}$

S

Q_2

Bilgi Kutusu

Veri Türleri

- **Sürekli Veri:** Belli bir aralıkta bütün değerleri alabilen veri türüdür. Bir insanın vücut sıcaklığı, kilosu, boyu, sürekli veriye örnek olarak verilebilir.
- **Kesikli Veri:** Belli aralıkta her değeri alamayan veri türüdür. İnsan sayısı, alınan oyuncak sayısı, bir şehrin nüfusu kesikli veriye örnek olarak verilebilir.

! Bir sonuç çıkarmak ya da çözüme ulaşabilmek için elde edilen her bilgiye veri denir. Veriler ölçüm, sayım, deney, gözlem veya araştırma yoluyla elde edilirler.

Merkezi Eğilim Ölçüleri

Bir lokanta işlerin yoğun olmasından dolayı bir aşçıyı işe almak için gazeteye ilan veriyor. İlanda deneme süreci olacağı ve bu sürede çalışana ücret ödeneceği belirtiliyor. Başvuran üç aşçının 5 gün boyunca farklı çeşitlerde yaptıkları yemek sayıları aşağıda veriliyor.

Ayşe : 3, 10, 2, 3, 2

Cenk : 4, 3, 6, 5, 2

Beyhan : 4, 6, 4, 6, 5

» Bu verilerden yararlanarak bu lokanta hangi aşçıyı işe almalıdır? Neden?

Bilgi Kutusu

- Bir veri grubundaki sayıların toplamının veri sayısına bölünmesi aritmetik ortalamayı verir. Aritmetik ortalama $\overline{X}$ ile gösterilir.
- Bir veri grubu küçükten büyüğe sıralandığında ortadaki değere **ortanca (medyan)** denir. Ortanca Q_2 ile gösterilmektedir.
- Bir veri grubundaki en çok tekrar eden değere **tepe değeri (mod)** denir.
- Bir veri grubundaki aritmetik ortalama, tepe değer (mod) ve ortanca (medyan) merkezi eğilim ölçüleridir. Merkezi eğilim ölçüleri verilerin hangi değer etrafında toplandığını gösterir.

Örnek

Türk Kızılayına bir gün boyunca kan veren kişilerin yaşları aşağıdaki gibidir.

19, 20, 30, 21, 19, 32, 25, 20, 23, 19, 25

Bu veri grubunun aritmetik ortalamasını, ortancasını ve tepe değerini bulalım.

Çözüm

Aritmetik ortalama;

$$\overline{X} = \frac{19 + 20 + 30 + 21 + 19 + 32 + 25 + 20 + 23 + 19 + 25}{11} = 23 \text{ olur.}$$

Verileri küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

19, 19, 19, 20, 20, 21, 23, 25, 25, 30, 32

Bu veri grubundaki en çok tekrar eden değer 19 olduğundan veri grubunun tepe değeri 19 dur.

Bu veri grubu sıralandığında ortadaki değer 21 olduğundan veri grubunun ortancası 21 dir.

Sıra Sizde

2, 3, 5, 4, 5, a, 5, 6

Yukarıdaki veri grubunun tepe değeri aritmetik ortalamasına eşit olduğuna göre a kaçtır?

! Bir veri grubunda çift sayıda veri varsa ortanca, ortada kalan iki sayının aritmetik ortalamasıdır.

Örnek

5, 20, 10, 15, 30, 25

Yukarıdaki veri grubunun ortanca ve tepe değerini bulalım.

Çözüm

Verileri küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

5, 10, 15, 20, 25, 30

Veri grubunda çift sayıda veri vardır. Bu nedenle ortancayı bulmak için ortada kalan iki sayının ortalamasını almalıyız.

Ortanca = $\frac{15 + 20}{2} = \frac{35}{2}$ = 17,5 olur.

! Bir veri grubunda tekrar eden veri yoksa, bu veri grubunun tepe değeri yoktur.

Veri grubunda tekrar eden sayı olmadığından bu veri grubunun tepe değeri yoktur.

Örnek

1, 7, 8, 1, 3, 2, 3, 9

Yukarıdaki veri grubunun tepe değerini bulalım.

! Bir veri grubunda aynı sayıda birden çok tekrar eden veri varsa, bu veri grubunun birden çok tepe değeri vardır.

Çözüm

Verileri küçükten büyüğe doğru sıralarsak 1, 1, 2, 3, 3, 7, 8, 9 olur. Veri grubunda en çok tekrar eden değer 1 ve 3 tür. O hâlde bu veri grubunun tepe değeri 1 ve 3 tür.

Sıra Sizde

Elif'in 8 gün boyunca kaç sayfa kitap okuduğu aşağıda verilmiştir.

Bu sayfa sayılarından oluşan veri grubunun merkezî eğilim ölçülerini bulunuz.

Tablo: Elif'in Günlere Göre Okuduğu Sayfa Sayısı

Günler	1	2	3	4	5	6	7	8
Sayfa Sayısı	20	16	24	20	24	24	18	18

Örnek

Bir ilçede son sekiz günde tüketici hakem heyetine gelen başvuru sayıları aşağıdaki gibidir.

1, 2, 2, 3, 3, 1, 2, 18

Bu veri grubunu merkezi eğilim ölçülerinden hangisinin ya da hangilerinin iyi bir şekilde temsil edebileceğini bulalım.

Çözüm

Bu veri grubunu küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 18

$$\overline{X} = \frac{1+1+2+2+2+3+3+18}{8} = \frac{32}{8} = 4 \text{ olur.}$$

$$\text{Medyan} = \frac{2+2}{2} = 2 \text{ olur.}$$

Tepe değer = 2 bulunur.

Bu veri grubunu aritmetik ortalama iyi bir şekilde temsil etmez. Çünkü aritmetik ortalama diğerlerine göre daha büyük olan 18 sayısından etkilenerek, gruptaki 18 hariç diğer tüm sayılardan daha büyük çıkmıştır.

Ortanca ve tepe değerinin ise tüketici hakem heyetine günlük gelen başvuru sayılarını daha iyi bir şekilde temsil ettiğini söyleyebiliriz.

! Bir veri grubunda ortanca ve tepe değer aritmetik ortalamaya göre uç değerlerden daha az etkilenir.

Merkezi Yayılım Ölçüleri

Tablo: Çalışanların Yaptığı Satış Miktarları

Günler	1. Çalışanın Yaptığı Satış Miktarı	2. Çalışanın Yaptığı Satış Miktarı
1	20	27
2	28	27
3	17	27
4	43	27

Bir firmadaki iki çalışanın 4 gün boyunca yaptığı satış miktarları yukarıdaki tabloda gösterilmiştir.

» Tabloya göre bu çalışanlardan hangisinin 5. gün yaptığı satış miktarını tahmin etmek daha kolaydır?

John Graunt
(Con Gırant)
(1620-1674)

John Graunt, bir yığın veriden istatistiksel çıkarım setini oluşturan ilk kişidir. Graunt matematiksel istatistiğin doğuşunu sağlamış, 57 yılın istatistiklerini tablolara indirgeyerek yayımlamıştır.

Bilgi Kutusu

- Bir veri grubundaki en büyük değer ile en küçük değer arasındaki farka **açıklık** denir.
- Bir gruptaki verilerin bu grubun aritmetik ortalamasına yakın olup olmadığı hakkında bilgi veren değer standart sapmadır. Standart sapma hesaplanırken aşağıdaki adımlar takip edilir.
  - Veri grubunun aritmetik ortalaması bulunur.
  - Her bir verinin aritmetik ortalama ile farkının kareleri toplamı bulunur.
  - Bulunan toplam veri sayısının 1 eksiğine bölünerek sonucun karekökü alınır.

  Standart sapma S ile gösterilir. $x_1, x_2, ..., x_n$ veri grubunun standart sapması,

  $$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{X})^2 + (x_2 - \overline{X})^2 + ... + (x_n - \overline{X})^2}{n - 1}} \text{ dir.}$$

- Açıklık ve standart sapma merkezî yayılım ölçülerinden bazılarıdır. Merkezî yayılım ölçüleri veri grubunun dağılımı hakkında bilgi vermektedir.

Örnek

5, 8, 12, 3, 3, 5, 7, 4, 11, 13 veri grubunun açıklığını bulalım.

Çözüm

Veri grubunun en büyük değeri 13, en küçük değeri ise 3 tür. O hâlde veri grubunun açıklığı 13 – 3 = 10 olur.

Örnek

3, 5, 6, 7, 9 veri grubunun standart sapmasını bulalım.

Çözüm

Veri grubunun aritmetik ortalaması

$$\overline{X} = \frac{3 + 5 + 6 + 7 + 9}{5} = \frac{30}{5} = 6 \text{ olur.}$$

Standart sapma ise

$$S = \sqrt{\frac{(3 - 6)^2 + (5 - 6)^2 + (6 - 6)^2 + (7 - 6)^2 + (9 - 6)^2}{5 - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{9 + 1 + 0 + 1 + 9}{4}} = \sqrt{\frac{20}{4}} = \sqrt{5} \cong 2,24 \text{ olur.}$$

> Standart sapma ne kadar küçükse veri grubundaki sayılar birbirine o kadar yakındır.

Örnek

Bir okulun basketbol takımında oynayan Kenan ve Burak'ın oynadıkları son 5 maçta attıkları basket sayıları aşağıda verilmiştir.

Tablo: Kenan ve Burak'ın 5 Maçta Attıkları Basket Sayıları

		Maçlar				
		1	2	3	4	5
Oyuncu	Kenan	10	6	9	7	13
	Burak	9	10	6	8	12

Bu oyunculardan hangisinin daha istikrarlı olduğunu belirleyelim.

Çözüm

Kenan ve Burak'ın attıkları basket sayılarının aritmetik ortalamalarını hesaplayalım.

Kenan'ın attığı basket sayılarının aritmetik ortalaması

$$\overline{X} = \frac{10+6+9+7+13}{5} = \frac{45}{5} = 9 \text{ olur.}$$

Burak'ın attığı basket sayılarının aritmetik ortalaması

$$\overline{X} = \frac{9+10+6+8+12}{5} = \frac{45}{5} = 9 \text{ olur.}$$

Kenan ve Burak'ın attıkları basket sayılarının aritmetik ortalaması aynıdır. Bu durumda hangi oyuncunun daha istikrarlı olduğuna aritmetik ortalama ile karar veremeyeceğimiz için standart sapmaları hesaplamalıyız.

Kenan'ın attığı basket sayılarının standart sapması

$$S = \sqrt{\frac{(10-9)^2+(6-9)^2+(9-9)^2+(7-9)^2+(13-9)^2}{5-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+9+0+4+16}{4}} = \sqrt{\frac{30}{4}} = \sqrt{7{,}5} \text{ bulunur.}$$

Burak'ın attığı basket sayılarının standart sapması

$$S = \sqrt{\frac{(9-9)^2+(10-9)^2+(6-9)^2+(8-9)^2+(12-9)^2}{5-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{0+1+9+1+9}{4}} = \sqrt{\frac{20}{4}} = \sqrt{5} \text{ bulunur.}$$

Burak'ın attığı basket sayılarının standart sapması, Kenan'ın attığı basket sayılarının standart sapmasından küçüktür. Bu durumda Burak'ın daha istikrarlı olduğunu söyleyebiliriz.

Sıra Sizde

İki ayrı kırtasiyenin bir hafta boyunca satmış oldukları hikâye kitaplarının sayısı aşağıda verilmiştir.

Tablo: İki Kırtasiyenin Bir Hafta Boyunca Sattığı Kitapların Sayısı

		Kırtasiye	
		A	B
Günler	Pazartesi	6	7
	Salı	8	5
	Çarşamba	6	8
	Perşembe	6	4
	Cuma	4	6

Bu kırtasiyelerden hangisinin satışlarının daha istikrarlı olduğunu belirleyiniz.

Örnek

Hatice ve Cemile'nin matematik yazılılarından almış oldukları notların aritmetik ortalamaları ve standart sapmaları aşağıda verilmiştir.

Tablo: Öğrencilerin Notlarının Aritmetik Ortalaması ve Standart Sapması

Öğrenci	Aritmetik Ortalama	Standart Sapma
Hatice	80	9
Cemile	78	2

Öğrencilerden hangisinin yazılı sonuçlarının daha istikrarlı olduğunu belirleyelim.

Çözüm

Hatice'nin notlarının aritmetik ortalaması, Cemile'nin notlarının aritmetik ortalamasından daha fazla olduğu için Hatice'nin daha başarılı olduğunu söyleyebiliriz. Fakat Cemile'nin not ortalaması daha az olmasına rağmen standart sapması Hatice'ye göre çok küçüktür. Bu ise Cemile'nin notlarının aritmetik ortalamaya daha yakın olduğunu gösterir. Dolayısıyla Cemile'nin standart sapması daha küçük olduğundan yazılı notları daha istikrarlıdır.

ANKET

Bir anket şu sonuçları verdi:

- İnsanların %70 i baharı sever.
- İnsanların %25 i baharı sevmediği gibi kışları da sevmez.

İnsanların kalan %5 inin fikri neydi?

Sıra Sizde

Arif ve Ayla'nın deneme sınavlarında İngilizceden yapmış oldukları net miktarlarının aritmetik ortalaması ve standart sapmaları aşağıda verilmiştir.

Tablo: Öğrencilerin Netlerinin Aritmetik Ortalaması ve Standart Sapması

Öğrenci	Aritmetik Ortalama	Standart Sapma
Arif	45	3,7
Ayla	45	1,3

Öğrencilerden hangisinin daha istikrarlı olduğunu belirleyiniz.

1. Bir okuldaki müzik kulübünün başkanlık seçimine 8 aday katılmaktadır. Bu adayların kulüp üyelerinden aldıkları oylar aşağıdaki gibidir.

7, 8, 6, 9, 8, 5, 9, 8

Alınan oy sayılarından oluşan bu veri grubunun merkezi eğilim ölçülerini bulunuz.

2. 20 soruluk matematik testinden 5 öğrencinin net sayıları aşağıdaki gibidir.

20, 20, 14, 16, 20

Bu veri grubunun standart sapmasını hesaplayınız.

3. Aşağıdaki veri gruplarından hangisinin standart sapması daha büyüktür?

a) 8, 10, 12, 14

b) 7, 14, 21, 28

c) 40, 43, 46, 49

ç) 20, 21, 22, 23

4. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.

- (.....) Bir veri grubunun tepe değeri olmayabilir.
- (.....) Bir veri grubunun mod ve medyanı verilerin uç değerlerinin büyüklüğünden etkilenmez.
- (.....) Bir veri grubu küçükten büyüğe sıralandığında ortadaki değere tepe değeri denir.
- (.....) Standart sapma merkezî eğilim ölçüsüdür.

5. 3, 2, 5, 4, 6 veri grubunun merkezî eğilim ve yayılım ölçülerini hesaplayınız.

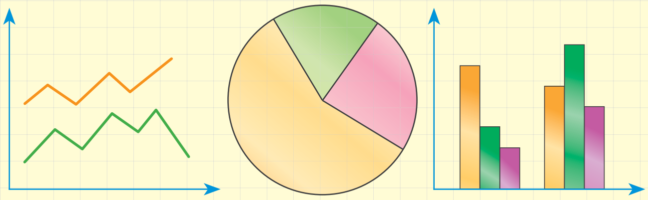
6. Aşağıda iki şehirde hafta içinde meydana gelen az hasarlı trafik kaza sayıları verilmiştir.

Tablo: İki Şehirde Hafta İçi Meydana Gelen Trafik Kaza Sayıları

		Günler				
		Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma
Şehir	A	4	3	2	3	3
	B	1	4	2	6	2

Bu verilerin aritmetik ortalamasını ve standart sapmasını bularak hangi şehirde trafik kazası riskinin daha az olduğunu belirleyiniz.

9.5.2. VERİLERİN GRAFİKLE GÖSTERİLMESİ



Günlük yaşantımızda gazetelerde, dergilerde, televizyon programlarında, broşürlerde, sınav sonuç belgelerinde, İnternet gibi farklı ortamlarda karşımıza farklı tipte grafikler çıkar. Veriler farklı grafik türleriyle özetlenebilir ve yorum yapılabilir.

» Yapılan yorumların isabetli olabilmesi, verilerin uygun grafikle gösterilmesine bağlı mıdır? Neden?

9.5.2.1. Histogram

Bir sınıftaki öğrencilerin matematik dersinden aldığı yazılı sınav sonuçları aşağıdaki gibidir.

60, 64, 66, 70, 73, 68, 68, 60, 80, 80, 80, 82, 86, 81, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 76, 82, 81

» Bu veri grubunu daire, çizgi veya sütun grafiği ile göstermek uygun olur mu?

» Bu veri grubunu gruplandırarak yandaki gibi bir tablo düzenlenebilir. Bu veri grubunun gruplandırılarak tablo üzerinde gösterilmesi ne gibi kolaylıklar sağlar?

» Bu tablodan yararlanarak verileri grafik üzerinde göstermek mümkün müdür? Açıklayınız.

Tablo: Not Aralığına Göre Öğrenci Sayısı

Not Aralığı	Öğrenci Sayısı
60–62	4
63–65	2
66–68	5
69–71	2
72–74	1
75–77	1
78–80	3
81–83	4
84–86	1

Bilgi Kutusu

Verilerin belirli gruplara ayrılarak her gruptaki veri sayısının bir sütunla ve sütunlar arasında boşluk kalmayacak şekilde gösterilmesiyle oluşturulan grafiklere **histogram** denir.

Histogram oluşturulurken veri grubunun açıklığı seçilen grup sayısına bölünür ve aşağıdaki eşitsizliği sağlayan en küçük doğal sayı değeri grup genişliği olarak belirlenir.

$$\frac{\text{Açıklık}}{\text{Grup sayısı}} < \text{Grup genişliği}$$

Örnek

Bir müzeyi cumartesi günü gezen kişilerin yaşları aşağıda verilmiştir.

10	14	15	16	18	20	22	22	30
31	20	21	10	13	30	34	25	27
26	11	17	18	28	19	29	26	29

Bu verileri beş gruplu histogramda gösterelim.

Çözüm

Önce verileri küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

10, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 20, 21, 22, 22, 25, 26, 26, 27, 28, 29, 29, 30, 30, 31, 34

Veri grubunun açıklığı 34 – 10 = 24 tir.

Grup sayısı 5 olduğundan grup genişliği $\frac{\text{Açıklık}}{\text{Grup sayısı}} = \frac{24}{5} = 4{,}8$ sayısından büyük olan en küçük doğal sayıdır. O hâlde grup genişliği 5 olur.

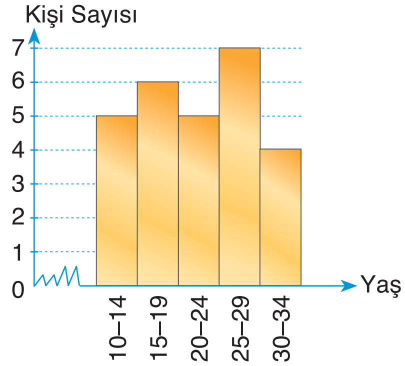
Verileri grup genişliği 5 olacak şekilde gruplayarak yandaki gibi bir tablo oluşturalım. Tablodan yararlanarak verilere ait histogramı aşağıdaki gibi çizebiliriz.

Tablo: Müzeyi Gezen Kişilerin Yaşları

Yaş	Kişi Sayısı
10 – 14	5
15 – 19	6
20 – 24	5
25 – 29	7
30 – 34	4

Histogramda eksenlerdeki zikzaklı çizgi, o sayılar arasında veri olmadığını belirtir.

Grafik: Müzeyi Gezen Kişilerin Yaşları



Örnek

Bir sınıftaki öğrencilerin kiloları aşağıda verilmiştir.

45	43	43	50	49	66	70	57	46	63
53	55	47	45	68	68	69	46	52	64
54	57	60	61	60	53	61	55	62	65
56	67	61	48	51	70	45	51	65	69

Bu verileri yedi gruplu histogramda gösterelim.

Çözüm

Önce verileri küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

43, 43, 45, 45, 45, 46, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 51, 52, 53, 53, 54, 55, 55, 56, 57, 57, 60, 60, 61, 61, 61, 62, 63, 64, 65, 65, 66, 67, 68, 68, 69, 69, 70, 70

Veri grubunun açıklığı 70 – 43 = 27 olur.

Grup sayısı 7 olduğundan grup genişliği $\frac{27}{7} \approx 3{,}86$ sayısından büyük olan en küçük doğal sayıdır. O hâlde grup genişliği 4 olur.

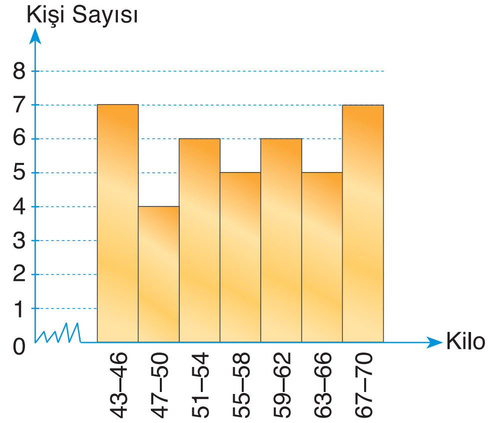
Verileri grup genişliği 4 olacak şekilde gruplayarak yandaki gibi bir tablo oluşturalım.

Tablo: Sınıftaki Öğrencilerin Kiloları

Kilo	Kişi Sayısı
43 – 46	7
47 – 50	4
51 – 54	6
55 – 58	5
59 – 62	6
63 – 66	5
67 – 70	7

Tablodan yararlanarak verilere ait histogramı aşağıdaki gibi çizebiliriz.

Grafik: Sınıftaki Öğrencilerin Kiloları



Sıra Sizde

Bir parkta bir gün içinde spor yapan kişilerin spor yapma süreleri dakika birimi ile aşağıda verilmiştir.

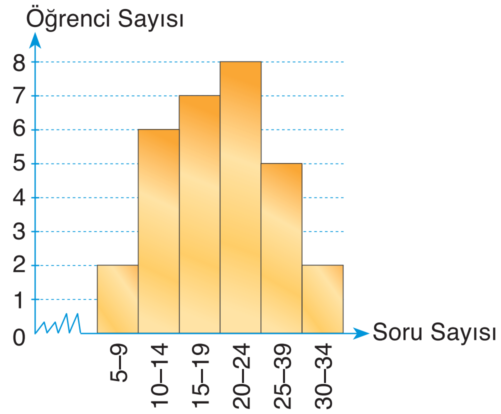
20	20	22	25	25	26	27	30
33	35	35	40	40	43	45	45
47	50	50	55	56	58	59	59

Bu verileri beş gruplu histogram ile gösteriniz.

Örnek

Aşağıdaki histogramda bir sınıftaki öğrencilerin bir günde çözdükleri soru sayısına göre dağılımı verilmiştir.

Grafik: Bir Günde Öğrencilerin Çözdükleri Soru Sayısı



Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayalım.

a) Sınıftaki öğrenci sayısı kaçtır?

b) Grafiğe göre grup genişliği kaçtır?

c) Günde 15–19 soru çözen öğrenci sayısı kaçtır?

ç) Günde 20–24 soru çözen öğrenci sayısı, 5–9 soru çözen öğrenci sayısından kaç fazladır?

Çözüm

a) Sınıftaki öğrenci sayısı 2 + 6 + 7 + 8 + 5 + 2 = 30 olur.

b) Grafik üzerinde görüldüğü gibi grup genişliği 5 tir.

c) Günde 15–19 soru çözen öğrenci sayısı 7 dir.

ç) Günde 20–24 soru çözen öğrenci sayısı, 5–9 soru çözen öğrenci sayısından 8 – 2 = 6 fazladır.

1. Yandaki histogram bir tatil köyüne bir aylık sürede gelen kişilerin yaşlarını göstermektedir.

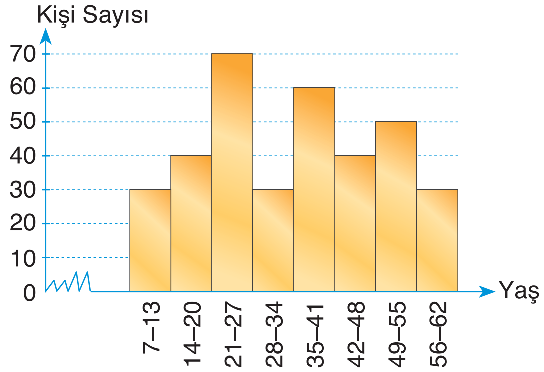
Grafiğe göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Tatil köyüne bir ay içerisinde kaç kişi gelmiştir?

b) Tatil köyüne en fazla hangi yaş grubundan kişiler gelmiştir?

c) Tatil köyüne en az hangi yaş grubundan kişiler gelmiştir?

Grafik: Tatil Köyüne Gelen Kişilerin Yaşları



2. 50 soruluk bir Türkçe testinde 9-A sınıfındaki öğrencilerin netleri yandaki tabloda verilmiştir.

Bu verilere uygun histogramı çiziniz.

Tablo: Öğrencilerin Türkçe Netleri

Netler	Kişi Sayısı
1–10	2
11–20	4
21–30	8
31–40	10
41–50	6

3. Yol yapım çalışmaları sırasında 1 ayda günlük kaç metre yol yapıldığı aşağıda verilmiştir.

36	31	41	20	21	28	42	24	39	41
28	30	35	28	40	29	23	33	34	42
43	37	35	21	38	27	30	22	44	34

Bu verileri altı gruplu histogram ile gösteriniz.

4. Aşağıdaki veri grubu bir sınıftaki öğrencilerin İngilizce sınavından aldıkları notlardan oluşmuştur.

43	77	70	57	57	53	70	87
91	40	71	86	63	93	100	52
100	46	56	92	75	56	89	99

Bu veri grubuna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Veri grubunun açıklığı kaçtır?

b) Bu veriler, beş gruplu histogram ile gösterildiğinde grup genişliği kaç olur?

c) Bu veriler, yedi gruplu histogram ile gösterildiğinde grup genişliği kaç olur?

9.5.2.2. Veri Gruplarını Uygun Grafik Türlerini Çizerek Yorumlama

Ceyhan, 5 gün boyunca kan şekerini ölçüyor ve sırasıyla 85, 100, 92, 98, 110 değerlerini görüyor.

» Verilerin değişimini gösterecek en uygun grafik türü hangisi olabilir?

Örnek

Tablo: Çanakkale İline Ait Sıcaklık Değerleri

		Sıcaklık (°C)	
		En yüksek	En düşük
Gün	Pazartesi	12	8
	Salı	11	7
	Çarşamba	10	5
	Perşembe	8	2
	Cuma	10	6

Yukarıdaki Çanakkale iline ait 5 günlük tahmini en düşük ve en yüksek sıcaklık değerleri verilmiştir.

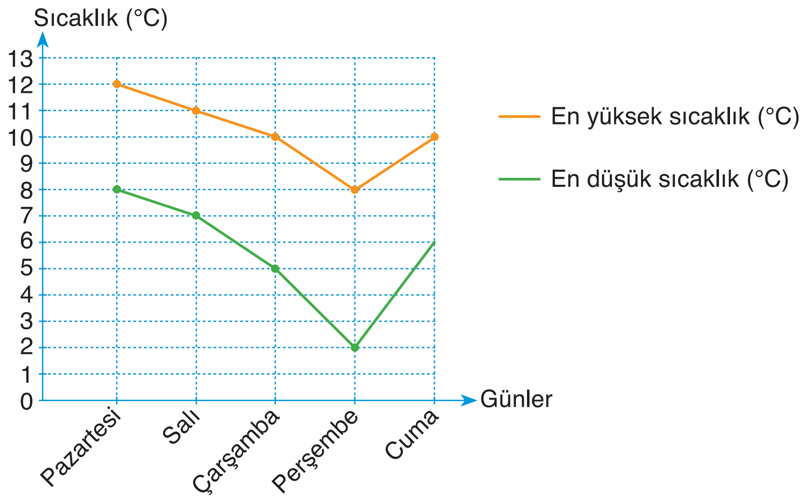
Bu verileri uygun bir grafik türü ile gösterelim.

> Bir veri grubunun belirli bir zaman aralığındaki değişimini göstermede çizgi grafiği kullanılabilir.

Çözüm

Hava sıcaklığındaki değişimi zamana göre inceleyeceğimiz için bu verileri çizgi grafiği ile göstermek uygun olacaktır.

Grafik: Çanakkale İline Ait Sıcaklık Değerleri



> Sürekli veriler, çizgi grafiği ile gösterilebilir.

Örnek

Yandaki tabloda Kâmil ve Nurşen'in 6 yaşına kadarki kilolarındaki değişim verilmiştir.

Tablodaki verileri bir tablolama programında uygun bir grafik türü ile gösterelim.

Tablo: Yaşa Göre Kilo Değişimi

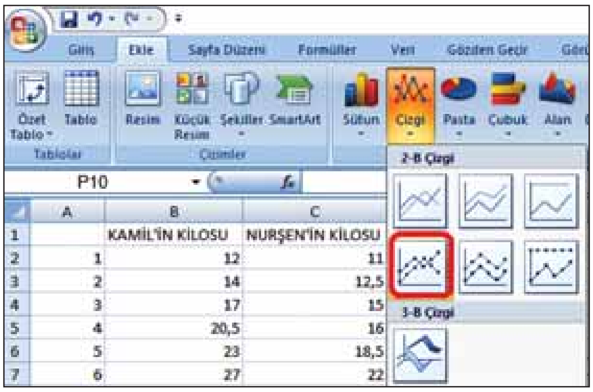
Yaş	1	2	3	4	5	6
Kâmil'in Kilosu	12	14	17	20,5	23	27
Nurşen'in Kilosu	11	12,5	15	16	18,5	22

Çözüm

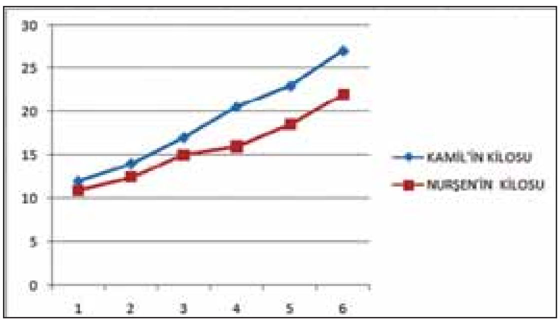
Tablodaki veriler sürekli veri olduğu için verileri çizgi grafiği ile göstermek uygun olacaktır.

Bir Excel sayfası açarak verileri yandaki gibi yazalım. Bu hücrelerin tümünü seçelim ve üstteki "Ekle" sekmesine tıklayalım.

Grafikler bölümünden çizgi grafiğini tıklayalım.



Bu işlemlerden sonra çizgi grafiği aşağıdaki gibi olacaktır.



Örnek

Bir sınıftaki öğrencilerin gelecekte tercih etmek istedikleri meslekler konusunda yapılan araştırmada elde edilen sonuçlar yandaki tabloda verilmiştir.

Bu verileri uygun bir grafik türü ile gösterelim.

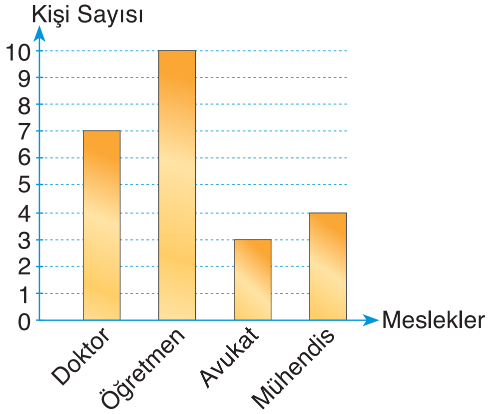
Tablo: Öğrencilerin Tercih Ettikleri Meslekler

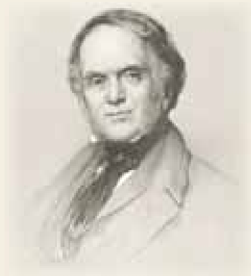
Meslekler	Kişi Sayısı
Doktor	7
Öğretmen	10
Avukat	3
Mühendis	4

Çözüm

Tablodaki veriler kesikli veri olduğundan bu veri grubu sütun grafiği ile gösterilebilir.

Grafik: Öğrencilerin Tercih Ettikleri Meslekler





William Playfair
(Vilyım Pileyfa)
(1759-1823)

1786 yılında, Ticari ve Siyasi Atlası adlı kitabında ilk veri grafiklerini yayınlamıştır. Kitapta 18. yy İngiltere'sinin ekonomisini anlatan ve açıklayan istatistiksel grafikler, çubuk grafikler, çizgi grafikler ve histogramlar kullanılmıştır.

Örnek

Ali, Can, Ece ve Nur'un son biryılda okudukları kitap sayıları yanda verilmiştir.

Bu verileri uygun bir grafik türü ile gösterelim.

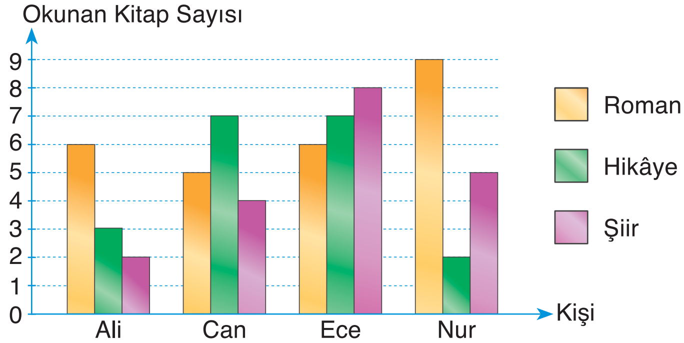
Tablo: Kişilerin Okudukları Kitap Sayıları

		Kişi			
		Ali	Can	Ece	Nur
Kitap	Roman	6	5	6	9
	Hikâye	3	7	7	3
	Şiir	2	4	8	5

Çözüm

Öğrencilerin okudukları kitap sayılarını karşılaştırmak için bu veri grubu sütun grafiği ile gösterilebilir.

Grafik: Kişilerin Okudukları Kitap Sayıları



! Veri gruplarını belirli bir zaman aralığında karşılaştırmak amacıyla sütun grafikleri kullanılabilir.

Örnek

Bir ailenin bir aylık giderleri yandaki tabloda verilmiştir.

Bu ailenin giderlerinin toplam harcamadaki oranlarını grafikle gösterelim.

Tablo: Bir Ailenin Aylık Giderleri

Giderler	TL
Kira	800
Gıda	900
Eğitim	100
Giyim	200
Diğer	400

Çözüm

! Kesikli veriler, sütun grafiği ile gösterilebilir.

Ailenin giderlerinin toplam harcamadaki oranlarını, en uygun daire grafiği ile gösterebiliriz.

Ailenin aylık toplam gideri 800 + 900 + 100 + 200 + 400 = 2400 TL dir.

Verileri daire grafiğine 360° lik açıyla orantılı olacak şekilde yerleştirelim.

Kirayı gösteren daire diliminin merkez açısının ölçüsü:

$\frac{800}{2400} = \frac{x}{360°} \Rightarrow x = 120°$ olur.

Gıdayı gösteren daire diliminin merkez açısının ölçüsü:

$\frac{900}{2400} = \frac{x}{360°} \Rightarrow x = 135°$ olur.

Eğitimi gösteren daire diliminin merkez açısının ölçüsü:

$\frac{100}{2400} = \frac{x}{360°} \Rightarrow x = 15°$ olur.

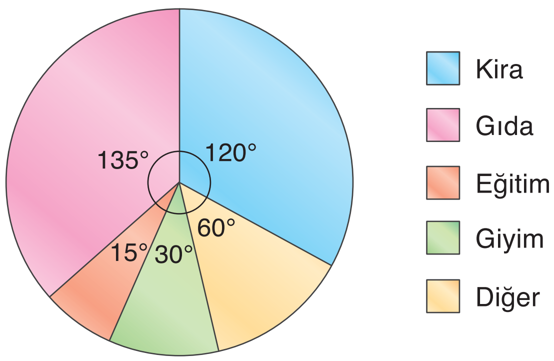
Giyimi gösteren daire diliminin merkez açısının ölçüsü:

$\frac{200}{2400} = \frac{x}{360°} \Rightarrow x = 30°$ olur.

Diğer harcamaları gösteren daire diliminin merkez açısının ölçüsü:

$\frac{400}{2400} = \frac{x}{360} \Rightarrow x = 60°$ olur. O hâlde daire grafiği aşağıdaki gibi olur.

Grafik: Bir Ailenin Aylık Giderleri



Sıra Sizde

Bir istasyonda bir günde yapılan tren seferlerindeki yolcu sayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo: Tren Seferleri

Sefer Sayısı	Bayan	Erkek
1. sefer	70	100
2. sefer	90	80
3. sefer	100	120
4. sefer	110	90
5. sefer	120	110
6. sefer	80	90

Bu verileri uygun bir grafik türünde gösteriniz.

! Bir verinin bütün veri grubu içerisindeki oranını göstermek için daire grafiği kullanılır.

Örnek

Aşağıda bir ailenin su israfını önlemek için aldığı tedbirler ve bu tedbirler sonunda bir yılda elde ettikleri tasarruf miktarları (ton) verilmiştir.

Tablo: Su İsrafını Önlemek İçin Alınan Tedbirler ve Tasarruf Edilen Su Miktarı

Alınan Tedbirler	Yıllık Tasarruf Edilen Su Miktarı (Ton)
Meyve ve sebzeleri suyun altında yıkamak yerine, su dolu bir kapta yıkamak	8
Bulaşıkları elde yıkamak yerine bulaşık makinesinde yıkamak	40
Diş fırçalarken musluğu kapalı tutmak	12

Bu verileri uygun bir grafik türü ile gösterelim.

Çözüm

Alınan tedbirlerin toplam tasarruftaki oranlarını görebilmek için verileri daire grafiği ile gösterelim.

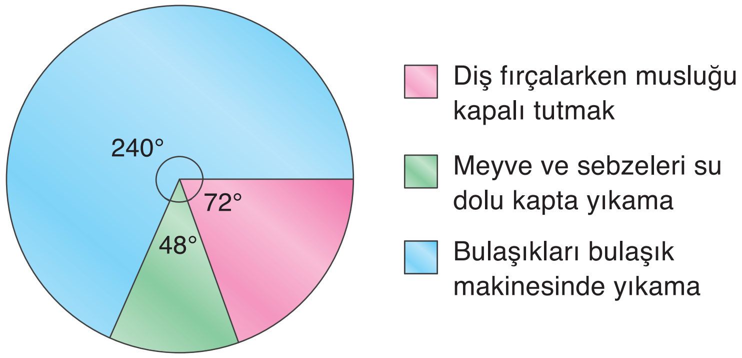
Yıllık tasarruf edilen toplam su miktarı 8 + 40 + 12 = 60 olur.

Her 1 ton suya karşılık gelen daire diliminin merkez açısının ölçüsü 360° : 60 = 6° dir.

O hâlde 8 ton suya karşılık gelen daire diliminin merkez açısının ölçüsü 8·6° = 48°, 40 ton suya karşılık gelen daire diliminin merkez açısının ölçüsü 40·6° = 240°, 12 ton suya karşılık gelen daire diliminin merkez açısının ölçüsü 12·6° = 72° olur.

Bu verilere uygun daire grafiği aşağıdaki gibi çizilir.

Grafik: Yıllık Tasarruf Edilen Su Miktarı



Örnek

Bir şehir terminaline gün içinde giriş yapan otobüs sayıları yandaki tabloda verilmiştir.

Bu verileri uygun bir grafik türü ile gösterelim.

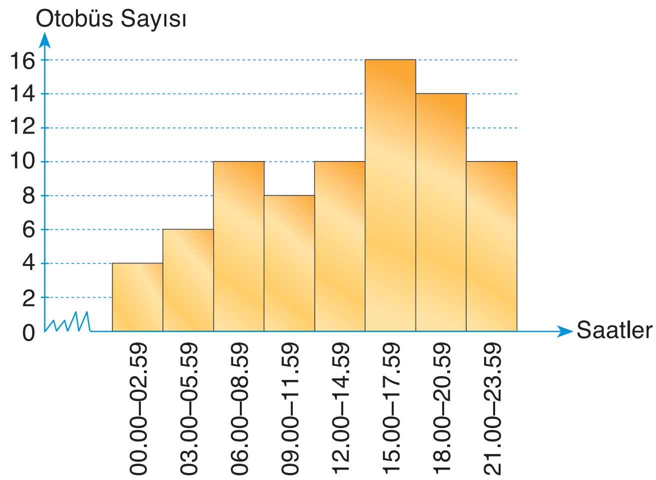
Tablo: Terminale Giriş Yapan Otobüs Sayıları

Saat	Otobüs Sayısı
00.00 – 02.59	4
03.00 – 05.59	6
06.00 – 08.59	10
09.00 – 11.59	8
12.00 – 14.59	10
15.00 – 17.59	16
18.00 – 20.59	14
21.00 – 23.59	10

Çözüm

Veriler gruplara ayrılarak verildiğinden bu veri grubu histogram grafiği ile gösterilebilir.

Grafik: Terminale Giriş Yapan Otobüs Sayıları



1. Ordu ilinde bir hafta boyunca her gün aynı saatte hava sıcaklığı ölçülerek yandaki grafik oluşturulmuştur.

Bu grafiğe göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

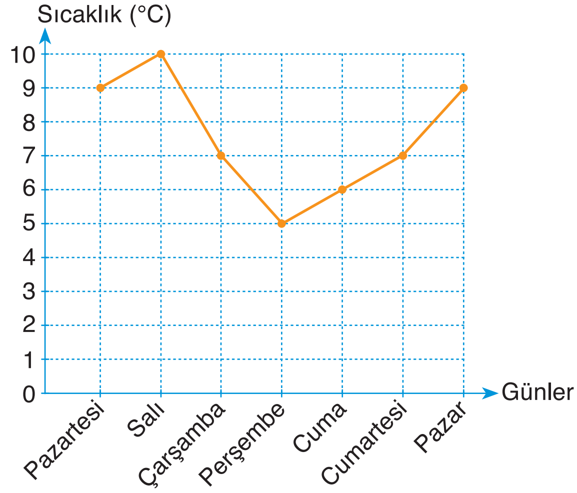
a) Pazar günü hava sıcaklığı bir önceki güne göre kaç derece artış göstermiştir?

b) En yüksek hava sıcaklığı hangi gün görülmüştür?

c) Perşembe günü hava sıcaklığı pazartesi gününe göre nasıl değişmiştir?

ç) Bir haftalık sıcaklık ortalaması kaç derecedir?

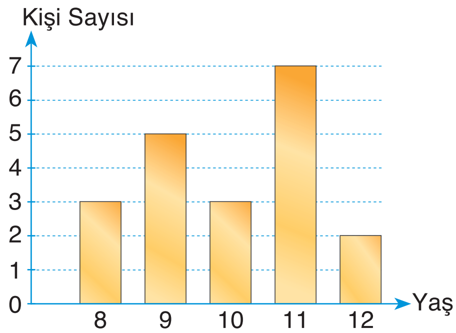
Grafik: Ordu'da Hava Sıcaklık Değerleri



2. Yandaki grafik bir gruptaki kişilerin yaşlara göre dağılımını göstermektedir.

Buna göre gruptan en az kaç kişi ayrılırsa kalan kişilerin yaşlarının aritmetik ortalaması 10 olur?

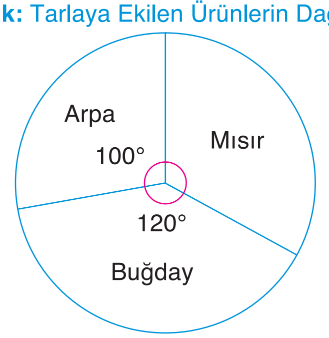
Grafik: Bir Gruptaki Kişilerin Yaş Dağılımı



3. Yandaki daire grafiği bir tarlaya ekilen ürünlerin dağılımını göstermektedir.

Mısır ekili alan, arpa ekili alandan 100 dönüm fazla olduğuna göre buğday ekili alan kaç dönümdür?

Grafik: Tarlaya Ekilen Ürünlerin Dağılımı



4. Yandaki grafikte bir atletizm yarışındaki atletlerin parkuru bitirme süreleri verilmiştir.

Bu grafiğe göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

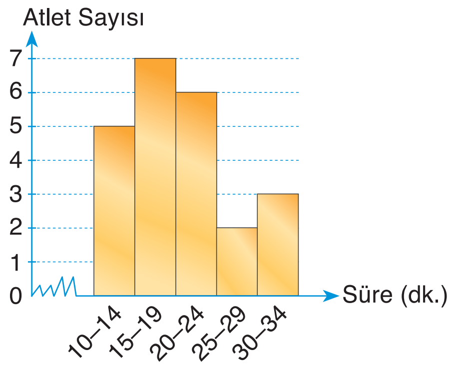
a) Yarışı 20–24 dk. aralığında bitiren kaç atlet vardır?

b) Yarışa katılan kaç atlet vardır?

c) Yarışı 18–22 dk. aralığında bitiren en fazla kaç atlet olabilir?

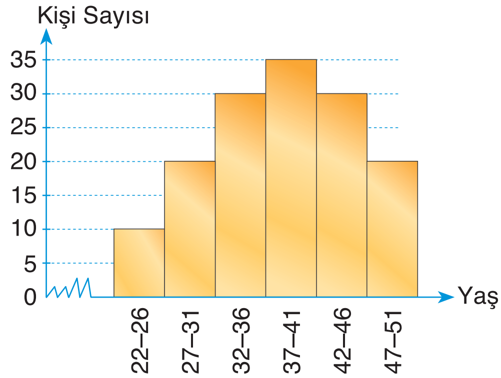
ç) Verilere göre grup genişliği kaçtır?

Grafik: Atletlerin Parkuru Bitirme Süreleri



DEĞERLENDİRME SORULARI

1. **Grafik:** Bir Şirkette Çalışan Kişilerin Yaşlarına Göre Dağılımı



Yukarıdaki histogramda bir şirkette çalışan kişilerin yaşlarına göre dağılımı verilmiştir.

Histograma göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) Toplam 145 çalışan vardır.

B) 27–31 yaş aralığında 20 kişi vardır.

C) Grup genişliği 5 tir.

D) Yaşı 30 olan 35 kişi vardır.

E) 47–51 yaş aralığında 20 kişi vardır.

2. Bir basketbolcunun 8 maç boyunca attığı basket sayıları

10, 14, 10, 14, 12, 12, 15, 15

şeklindedir.

9. maçta kaç basket atarsa yeni oluşacak veri grubunun tepe değeri 10 olur?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

3.

40	70	42	72	41	53	68	93	41
92	63	47	65	48	52	67	92	40
50	55	88	63	99	62	69	95	87

Yukarıdaki veri grubu yedi gruplu histogram grafiğinde gösterildiğinde grup genişliği kaç olur?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

4. I. Bir veri grubunda aritmetik ortalama, tepe değer ve ortanca merkezi eğilim ölçüleridir.

II. Açıklık, veri grubundaki en büyük değer ile en küçük değer arasındaki farktır.

III. Ortanca değer veri grubunun elemanı olmayabilir.

IV. Açıklık ve standart sapma merkezi yayılım ölçüleridir.

V. Bir veri grubunda birden çok tepe değer olabilir.

Yukarıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. Yaşlarının ortalaması 18 olan dört kişilik bir gruba yaşlarının ortalaması 24 olan iki kişi katılıyor.

Buna göre oluşan yeni grubun yaşlarının aritmetik ortalaması kaçtır?

A) 18 B) 19 C) 20 D) 22 E) 24

6. 2, 5, $x - 2$, 3, $y + 1$, 5, 2 veri grubunun tepe değeri 3 ise $x + y$ kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 10

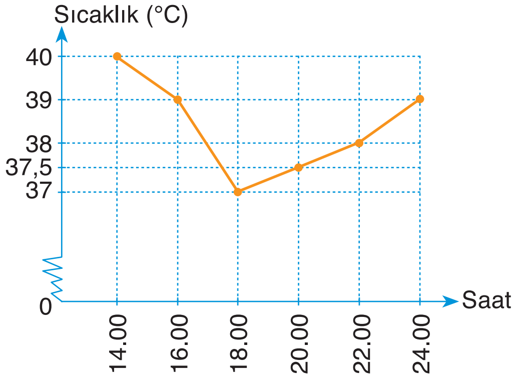
7. Mehmet Bey gelirinin %18 ini yardım kampanyalarına, %22 sini eğitim harcamalarına, kalanını ise diğer giderlerine ayırmıştır.

Mehmet Bey'in giderleri daire grafiği ile gösterilirse diğer giderlerine ait daire diliminin merkez açısının ölçüsü kaç derece olur?

A) 60 B) 72 C) 108 D) 216 E) 240

8. Bir hastanın vücut sıcaklığının belli saatlerdeki ölçüm sonuçları aşağıdaki çizgi grafiğinde verilmiştir.

Grafik: Hastanın Belli Saatlerdeki Vücut Sıcaklığı



Grafiğe göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) Vücut sıcaklığında en fazla düşüş 16.00–18.00 saatleri arasında olmuştur.

B) Hastanın vücut sıcaklığı iki kez 39 °C ölçülmüştür.

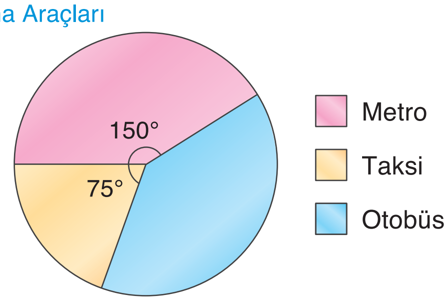
C) Vücut sıcaklığındaki en fazla artış 20.00–22.00 saatleri arasında olmuştur.

D) En düşük vücut sıcaklığı 18.00 de ölçülmüştür.

E) En yüksek vücut sıcaklığı 14.00 da ölçülmüştür.

9. Aşağıdaki grafik bir şehirdeki insanların tercih ettikleri toplu taşıma araçlarına göre dağılımını göstermektedir.

Grafik: İnsanların Tercih Ettikleri Toplu Taşıma Araçları

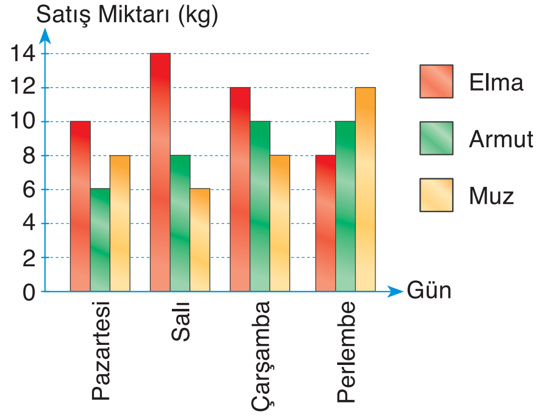


Metroyu tercih edenlerin sayısı 120 000 olduğuna göre otobüsü tercih edenlerin sayısı kaçtır?

A) 72 000 B) 96 000 C) 108 000 D) 110 000 E) 120 000

10. Aşağıdaki sütun grafiğinde 3 farklı meyvenin günlere göre satış miktarları gösterilmiştir.

Grafik: Meyvelerin Günlere Göre Satış Miktarı



Grafiğe göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) Toplam 44 kg elma satılmıştır.

B) Salı günü satılan armut, muzdan 2 kg fazladır.

C) Toplamda en çok armut satışı yapılmıştır.

D) Perşembe günü en çok muz satışı olmuştur.

E) Pazartesi günü satılan armut, çarşamba günü satılan armuttan 4 kg daha azdır.

11. I. Tepe değeri 3 tür.

II. Aritmetik ortalaması 3 tür.

III. Ortancası 3 tür.

3, 4, 3, 3, 5, 1, 2, 3 veri grubu için yukarıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) I ve II C) II ve III D) II ve III E) I, II ve III

12. Bir öğrencinin matematik testinden yaptığı netler 14, 15, 16 dır.

Bu veri grubunun standart sapması kaçtır?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

CEVAP ANAHTARI

MANTIK

9.1 DEĞERLENDİRME SORULARI

1.E	5.A	9.D	13.E
2.B	6.D	10.C	14.B
3.B	7.C	11.B	15.A
4.E	8.A	12.D	16.E

KÜMELER

9.2 DEĞERLENDİRME SORULARI

1.D	5.B	9.D	13.B
2.A	6.A	10.A	14.C
3.E	7.D	11.B	15.D
4.C	8.E	12.C	16.E

DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

9.3 DEĞERLENDİRME SORULARI - 1

1.C	5.D	9.E	13.E
2.A	6.A	10.B	14.C
3.B	7.D	11.C	15.C
4.B	8.A	12.D	16.D

9.3 DEĞERLENDİRME SORULARI - 2

1.B	5.C	9.D	13.C
2.A	6.E	10.A	14.D
3.E	7.C	11.B	15.D
4.A	8.D	12.A	16.C

ÜÇGENLER

9.4 DEĞERLENDİRME SORULARI - 1

1.D	5.B	9.C	13.E
2.A	6.B	10.B	
3.C	7.E	11.A	
4.E	8.B	12.D	

9.4 DEĞERLENDİRME SORULARI - 2

1.D	5.B	9.D	13.C
2.B	6.C	10.A	
3.D	7.E	11.C	
4.C	8.B	12.E	

VERİ

9.5 DEĞERLENDİRME SORULARI

1.D	4.E	7.D	10.C
2.A	5.C	8.C	11.E
3.E	6.D	9.C	12.A

– A –

alan : Yüz ölçümü.

altın oran : Değeri 1,6180339887… olan bir irrasyonel sayı.

arazi : Yeryüzü parçası, toprak.

– B –

bakteri : Toprakta, suda, canlılarda bulunan, çürüme, mayalanma veya hastalıklara yol açan, küresel, silindirimsi, kıvrık biçimli olan, bölünerek çoğalan, klorofilsiz, tek hücreli canlı.

basamak : Ondalık sayı sisteminde bir sayının sağdan sola doğru rakamlarının derecelerine göre her birinin bulunduğu yer.

bilinmeyen : Bir sorunun çözümünde bulunması istenen, aranan; değeri verilmemiş olan, belli olmayan nicelik.

birim : Bir nesneyi ölçmek için kabul edilen büyüklük.

bitkisel besin : Bitkilerden elde edilen besin.

bölen : Bir bölme işleminde bölünenin kaç eşit parçaya ayrıldığını gösteren sayı.

bölüm : Bir bölme işlemi sonunda elde edilen sayı.

bölünen : Bir bölme işleminde eşit bölümlere ayrılması gereken sayı, bölme işlemine uğratılan nicelik.

– Ç –

çap : Uç noktaları çember üzerinde bulunan ve çemberin merkezinden geçen doğru parçası.

çember : Düzlemde sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesi.

çevre : Düzlem üzerindeki bir şekli sınırlayan çizgi.

çözelti : Çözünme sonucu ortaya çıkan madde.

– D –

daire dilimi : Bir dairede merkez açının iç bölgesindeki yayla sınırlı alan.

daire grafiği : Eldeki verilerin daire dilimleri ile ifade edildiği grafik.

değişken : Türlü sayı değerleri alabilen, değişebilen nicelik.

derece : Bir çemberin 360 ta birine eşit olan açı birimi.

dış açı : İki doğruyu kesen bir doğrunun, bu doğruların dışında kalacak biçimde oluşturduğu açı.

dişli : Dişleri olan çark.

dizge : Bir bütün oluşturacak biçimde birbirine bağlı ögelerin bütünü, sistem.

doğrusal noktalar : Bir doğru üzerinde bulunan noktalar.

doğru parçası : Bir doğrunun, üzerinde alınmış iki nokta ile sınırlandırılmış parçası.

– E –

eşlik : Eş olma durumu.

eşitlik : İki veya daha çok şeyin eşit olması durumu.

eşitsizlik : Eşit olmama durumu.

– F –

filozof : Felsefe ile uğraşan ve felsefenin gelişimine katkıda bulunan kimse, felsefeci.

fraktal : Sonsuza dek iç içe geçmiş, birbirini tekrarlayan şekiller.

– G –

gök bilimci : Gök bilimi ile uğraşan bilgin, astronom.

gök bilimi : Gök cisimlerinin konumlarını, hareketlerini, birbirine olan uzaklıklarının ölçülmesini, bunların fizik ve kimya bakımından yapılarını inceleyen bilim, astronomi.

grafik : Bir olayın, niceliğin türlü durumlarını göstermeye ya da birkaç şey arasında karşılaştırma yapmaya yarayan, biçim, desen ya da çizgilerle yapılan gösterim.

– H –

hayvan barınağı : Hayvanların barınacağı yer.

hayvansal besin : Hayvandan elde edilen besin.

huzurevi : Yaşlanmış kimselerin bakımlarının yapıldığı ve barındığı kurum.

– İ –

iç açı : Bir çokgenin iç bölgesinde kalan açı.

istatistik : İlkelerini olasılık kuramlarından alarak eldeki verileri grafik ve sayı biçiminde değerlendirmeye dayandıran matematiğin uygulamalı dalı, sayım bilimi.

– K –

kâr : Maliyet fiyatıyla satış fiyatı arasındaki fark.

karbonhidrat : Karbon, hidrojen ve oksijen atomlarından oluşan organik bileşiklerin genel adı.

karışım : Birden çok şeyin karıştırılmasıyla elde edilen veya ortaya çıkan şey.

kenar : Bir şekli sınırlayan çizgilerden her biri.

kesen : Bir şekli kesen doğru.

– M –

merkez açı : Köşesi çemberin veya dairenin merkezi olan açı.

metafizik : Duyularımızla algılayamadığımız varlıkların sebeplerini ve temellerini araştıran felsefe, doğaötesi.

– O –

orijin : Koordinat eksenlerinin kesiştikleri nokta.

ortalama hız : Bir cismin toplam yer değiştirmesinin toplam geçen zamana oranı.

– P –

paralel doğrular : Aynı doğrultudaki ortak noktası olmayan doğrular.

paradoks : Düşünceler arasında tartışmaya açık, kesin bir yargı içermeyen karşıtlık.

periyodik : Belirli aralıklarla yapılan.

postulat : İspatsız kabul edilen önerme.

problem : Çözülmesi gereken mesele, soru, sorun veya aşılması gereken engel.

protein : Canlı hücrelerin ana maddesini oluşturan, genellikle sülfür, oksijen ve karbon ögeleri bulunan amino asit birleşiminden oluşmuş, yumurta akı, et, süt vb. yiyeceklerde bulunan, karmaşık yapılı doğal madde.

– S –

sabit hız : Bir doğru boyunca, eşit zaman aralıklarında eşit miktarda yer değiştiren cismin hızı.

sayı doğrusu : Her bir noktasına bir gerçek sayının karşılık geldiği doğru.

sevgi evleri : Toplu bakım hizmeti verilen kuruluş binalarından farklı olarak, aile ortamına benzer yapı ve ilişki sisteminde, ev tipi binalardan oluşan, her binada 10-12 çocuğun bakımlarının sağlanabileceği çocuk yuvaları ile yetiştirme yurtları.

– Ş –

şezlong : Üzerine uzanılabilecek biçimde ayarlanan, döşeme yerine bez gerilen bir tür taşınabilir koltuk.

– T –

tez : Üniversitelerde öğrencilerin veya öğretim üyelerinin hazırlayıp bazen bir sınav kurulu önünde savundukları bilimsel eser.

– Ü –

ücret : İş gücünün karşılığı olan para veya mal, kiralanan veya satın alınan bir şey için ödenen para.

üçgen : Üç tepe noktası, üç açısı, üç kenarı olan geometrik şekil.

– Y –

yay sarkacı : Serbest durumda bulunan esnek yayın ucuna bir cismin asılmasıyla oluşan sistem.

yay sabiti : Kuvvetin uzama miktarına bölünmesiyle elde edilen sabit değer.

yüksek lisans : Lisans diplomasıyla doktora arasındaki akademik derece.

yüzde : Herhangi bir sayı ile kullanıldığında yüze bölünen bir şeyin o kadarlık parçası.

– Z –

zam : Bir şeyin fiyatını artırma.

zarar : Bir şeyin, bir olayın yol açtığı çıkar kaybı.

KAYNAKÇA

Akın, M. F. (2013). *Öğretmen Adaylarının Penceresinden Matematiğe Çığlık.* Ankara: Elhan.
Altun, M. (2013). *Ortaokullarda Matematik Öğretimi.* Bursa: Aktüel.
Altun, M. (2015). *Liselerde Matematik Öğretimi.* Bursa: Aktüel.
Altun, M. (2015). *Matematik Uygulamaları, Sıradışı Problemler, Matematik Okuryazarlığı Soruları Efemat 5 – 6*. Bursa: Aktüel.
Altun, M. (2015). *Matematik Uygulamaları, Sıradışı Problemler, Matematik Okuryazarlığı Soruları Efemat 7 – 8.* Bursa: Aktüel.
Bakkal, S. (2017). *Geometri ve İspatlar.* Ankara: Edge- Elhan.
Balcı M. (2000). *Genel Matematik.* Ankara: Balcı.
Balcı M., Aral, A. (2003). *Çözümlü Matematik Analiz Problemleri.* Ankara: Balcı.
Çelik, B., Cangül, İ. N., Çelik, N., Bizim, O., Öztürk, M. (2004). *Temel Matematik*. Ankara: Nobel.
Dönmez, A. (2002). *Matematiğin Öyküsü ve Serüveni "Dünya Matematik Tarihi Ansiklopedisi": Cilt 3.* İstanbul: Toplumsal Dönüşüm.
Dönmez, A. (2002). *Matematiğin Öyküsü ve Serüveni "Dünya Matematik Tarihi Ansiklopedisi": Cilt 6.* İstanbul: Toplumsal Dönüşüm.
Dönmez, A. (2002). Matematiğin Öyküsü ve Serüveni *"Dünya Matematik Tarihi Ansiklopedisi": Cilt 8.* İstanbul: Toplumsal Dönüşüm.
Dönmez, A. (2002). *Matematiğin Öyküsü ve Serüveni "Dünya Matematik Tarihi Ansiklopedisi": Cilt 9.* İstanbul: Toplumsal Dönüşüm.
Göker, L. (1997). *Matematik Tarihi ve Türk-İslâm Matematikçilerinin Yeri.* İstanbul: MEB.
Halıcı, E. (2017). *Zeka Oyunları 1. Kitap.* Ankara: TÜBİTAK.
Halıcı, E. (2017). *Zeka Oyunları 3. Kitap.* Ankara: TÜBİTAK.
James, I. (2013). *Büyük Matematikçiler Euler'den Von Neumann'a.* İstanbul: Türkiye İş Bankası.
Karakaş, H. İ. (2012). *Sosyal ve Beşeri Bilimlerde Matematik-1*. Ankara: Pusula.
Milli Eğitim Bakanlığı. (2018). *Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı.* Ankara: MEB.
Van De Walle, J. A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M. (2014). *İlkokul ve Ortaokul Matematiği Gelişimsel Yaklaşımla Öğretim.* Ankara: Nobel.

İNTERNET KAYNAKLARI

Sayfa 54. http://www.bdb.hacettepe.edu.tr/TOBR_kitap.pdf - adresinden 17.12.2017 tarihinde erişilmiştir.
Sayfa 61. http://www.ito.org.tr/Dokuman/Sektor/1-99.pdf - adresinden 15.12.2017 tarihinde erişilmiştir.
Sayfa 167. http://nsankir.etu.edu.tr/nsankir/Fiz101_Ders_Notlar_files/Fizik%20101-Titreşim%20Hareketi.pdf - adresinden 28.12.2017 tarihinde erişilmiştir.
Sayfa 172. http://users.metu.edu.tr/e154682/altinoran.htm - adresinden 10.02.2018 tarihinde erişilmiştir.
Sayfa 192. http://www.gib.gov.tr/yardim-ve-kaynaklar/yararli-bilgiler/gecikme-zammi-orani - adresinden 08.02.2018 tarihinde erişilmiştir.
Sayfa 193. http://www.trafik.gov.tr/SiteAssets/Trafik%20Kitaplık/Mevzuat/2018_Trafik_Ceza_Rehberi.pdf - adresinden 08.02.2018 tarihinde erişilmiştir.
Sayfa 233. http://miniaturk.com.tr/mİnİatuerk/hakkımızda.aspx - adresinden 10.11.2017 tarihinde erişilmiştir.
Sayfa 244. http://mathworld.wolfram.com/SierpinskiSieve.html - adresinden 10.12.2017 tarihinde erişilmiştir.
http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_gts&view=gts – adresinden 07.01.2018 tarihinde erişilmiştir.
http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_yazimkilavuzu&view=yazimkilavuzu –adresinden 07.01.2018 tarihinde erişilmiştir.

GÖRSEL KAYNAKÇA

1) **Yayınevi arşivi:** 16, 17, 25, 38, 48, 49, 52, 56, 64, 86, 111, 115, 128, 149, 197, 217, 219, 220, 221, 223, 260, 265, 267, 269, 305, 308, 324, 325, 350, 361.
2) **Shutterstock:** 12, 13, 46, 47, 92, 93, 94, 116, 158, 170, 172, 178, 201, 210, 211, 233, 264, 320, 344, 345.